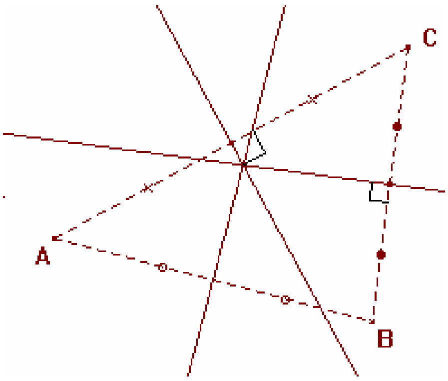
Uitwerkingen hoofdstuk 23 vwo B 1,2 deel 6

Voronoi-diagrammen

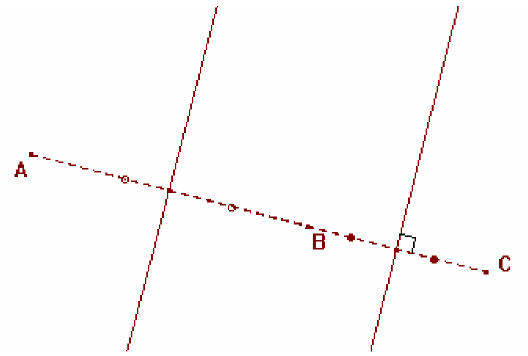
1a. Alle punten met gelijke afstand tot de punten A en B liggen op de middelloodlijn van AB . A ligt links van de mll. Dus alle punten links van de mll. hebben een kleinere afstand tot A dan tot B. Aan de rechterkant is de situatie omgekeerd.

b.



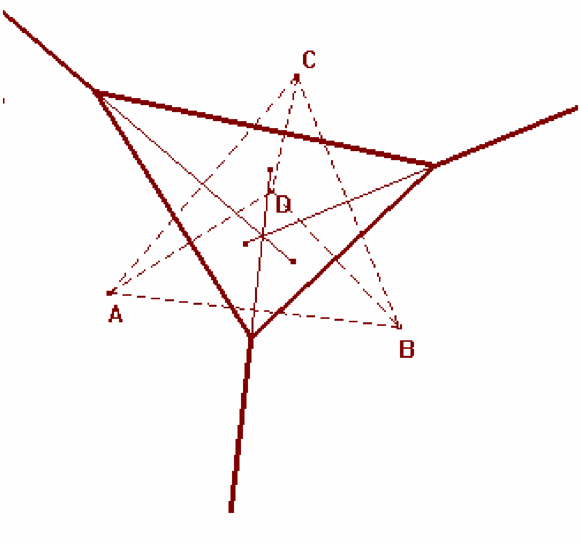
c. Het snijpunt van de 3 mll. is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van Δ ABC.

d.

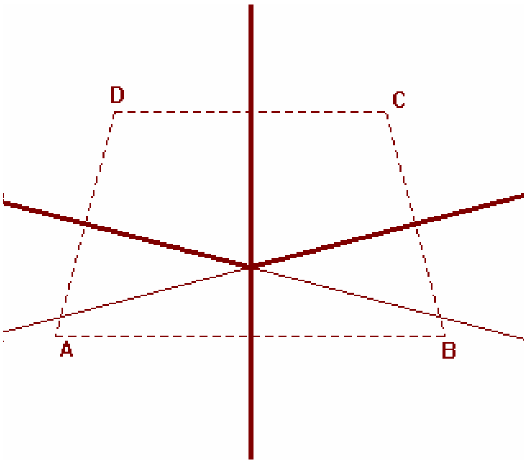


Er zijn nu twee grenzen getekend.

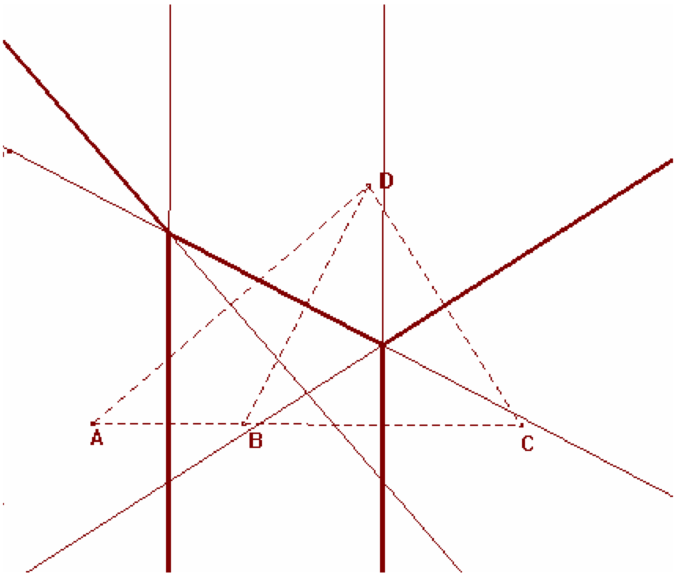
2a.



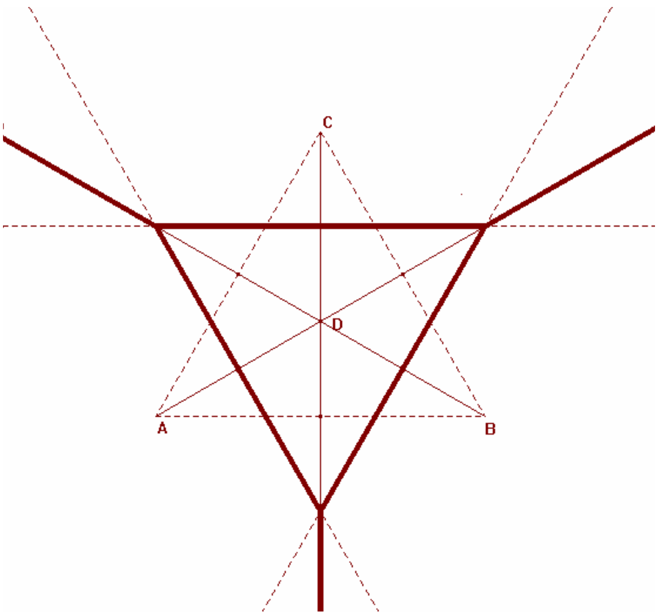
2b.



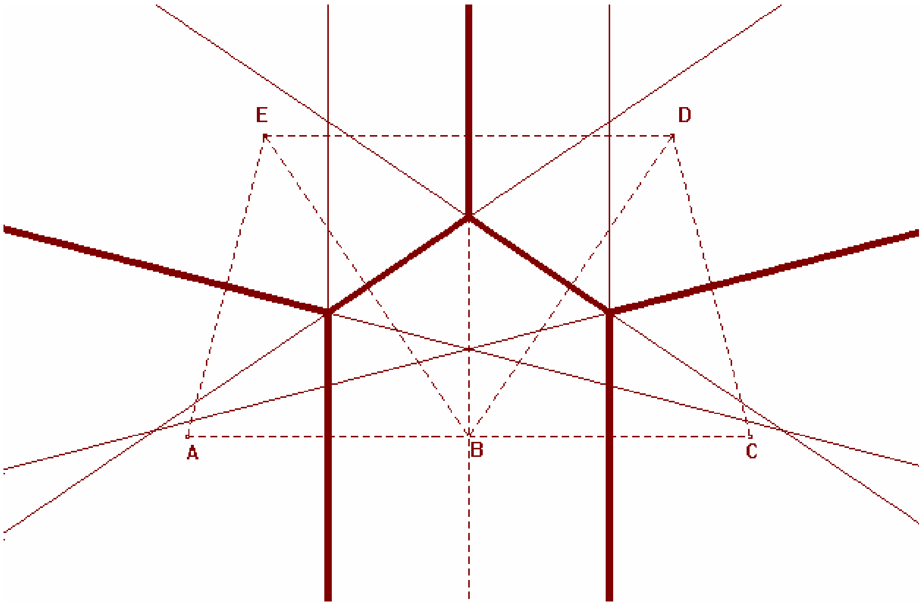
3a.



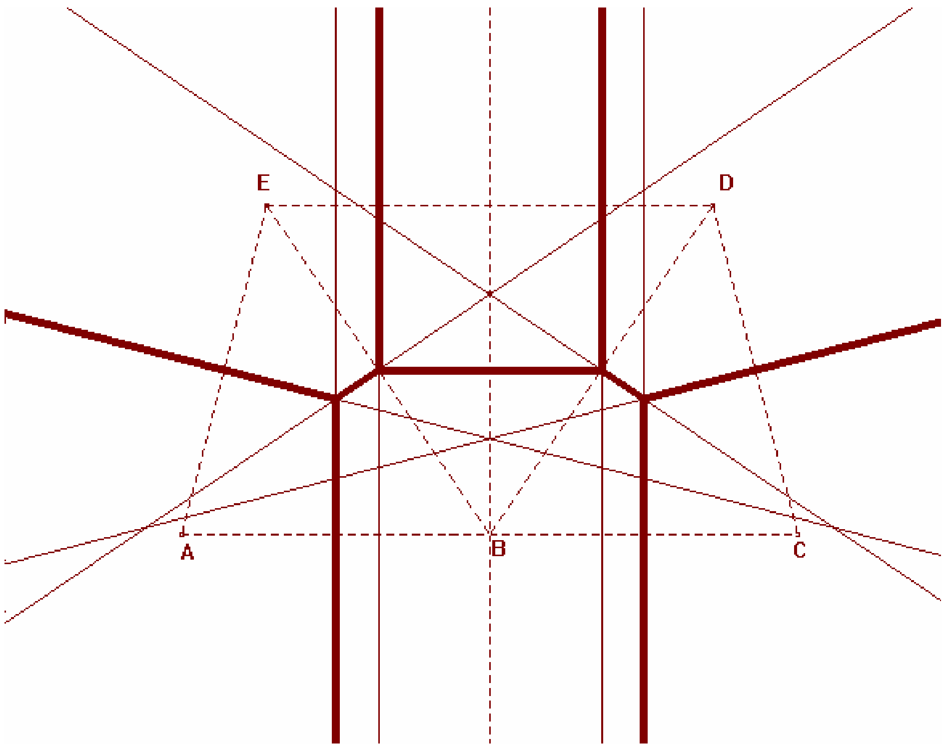
b.



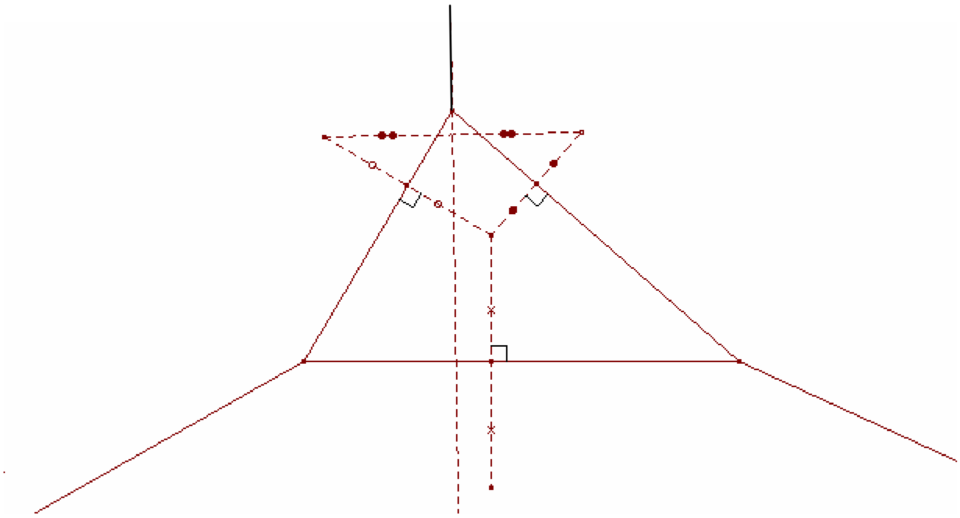
4a.



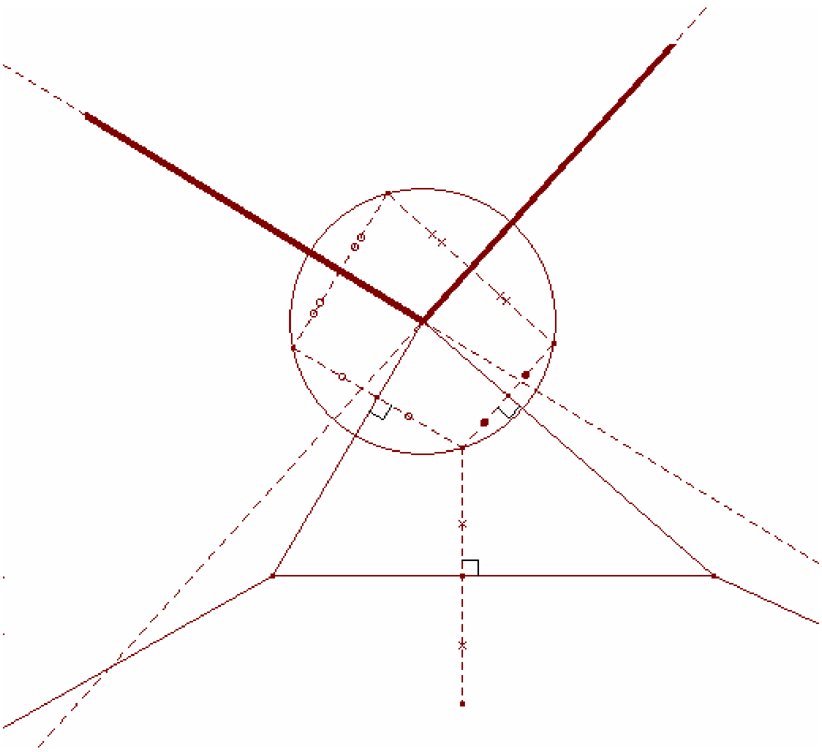
b.



5a.

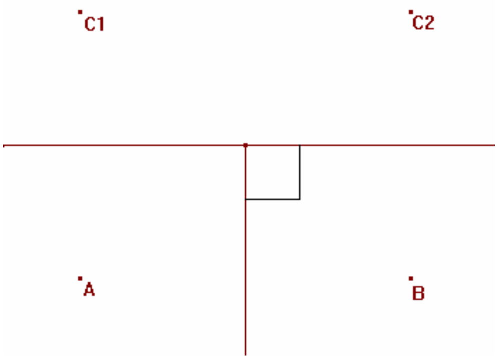


b.



Door in het bovenste punt twee halve lijnen te tekenen ontstaat een figuur met 5 gebieden , 7 grenzen en 3 hoekpunten. Deze halve lijnen krijg je door eerst een cirkel te tekenen met m.p. het bovenste punt , die verder gaat door de drie gegeven centra. neem het 5^{e} centrum op deze cirkel. De twee middelloodlijnen moeten dan de twee nieuwe grenzen zijn.

6.



Het kan geen Voronoi-diagram zijn , want als je het centrum A van het gebied linksonder spiegelt naar boven dan krijg je het centrum C1 en als je datzelfde doet voor centrum B dan krijg je het centrum C2, maar een gebied kan maar één centrum hebben . Dus de figuur kan geen Voronoi-diagram zijn.

7. Zelf doen met VoroGlide,

8a. De grenzen zijn evenwijdige lijnen loodrecht op de lijn die door de 15 centra gaat.

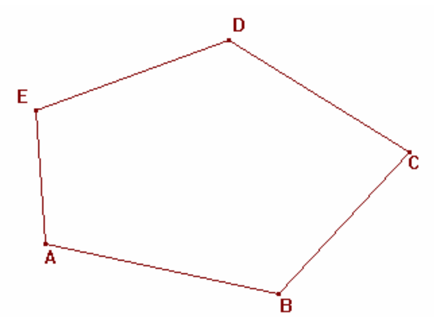
b. De nieuwe grenslijn lijkt heel veel op een parabool.

9a. De grenzen komen samen in het middelpunt van de cirkel.

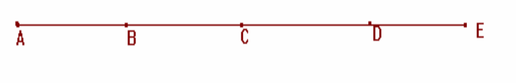
b. Binnen de cirkel lijkt het op een ellips of een cirkel zelf en buiten de cirkel lijkt het op een hyperbool of parabool.(Dit is niet goed te zien)

10. Bij cel D ontstaat een driehoek als centrum D zich binnen driehoek ABC bevindt.

11a.

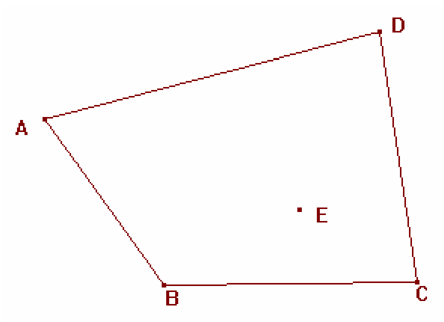


De 5 punten vormen een 5-hoek waarbij geen van de punten binnen de 4-hoek van de 4 andere punten ligt. Bijv.



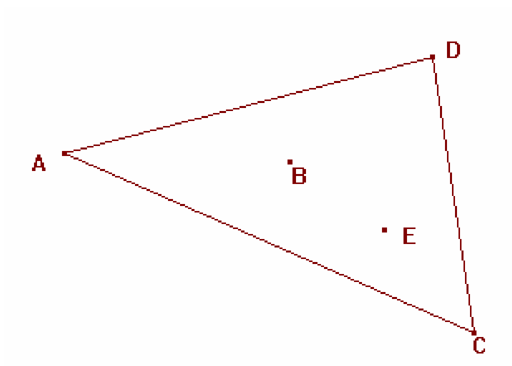
De 5 centra kunnen ook op een lijn liggen.

b.



Bij 4 cellen oneindig groot moet 1 cel zich binnen de vierhoek bevinden van de andere 4 punten. Bijv.

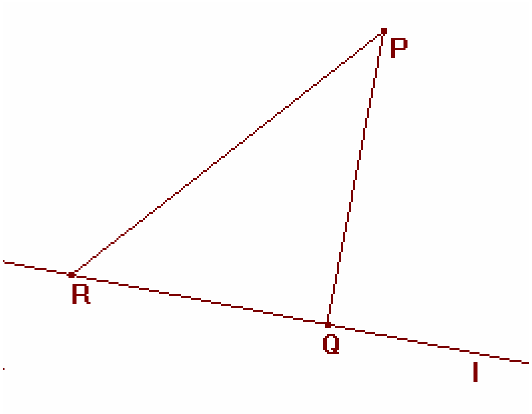
c.



Nu moeten 2 punten zich binnen de driehoek van de andere 3 punten bevinden.

d. Als je dit proces voortzet dan zouden 3 punten zich binnen het lijnstuk van de andere 2 punten bevinden. Dit kan natuurlijk niet.

12.



Gegeven: Lijn l en punt P en Q met PQ $\perp l$

Te bew. PQ is kortste verbinding van P tot l

Bew. Kies punt R op l maar niet op Q

$$\left.\begin{array}{l} PQ^2 + QR^2 = PR^2 \\ QR > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow PQ^2 > PR^2 \Rightarrow$$

PQ $> PR$ $\Rightarrow$ Iedere verbinding van P met een punt van l is altijd meer dan PQ.

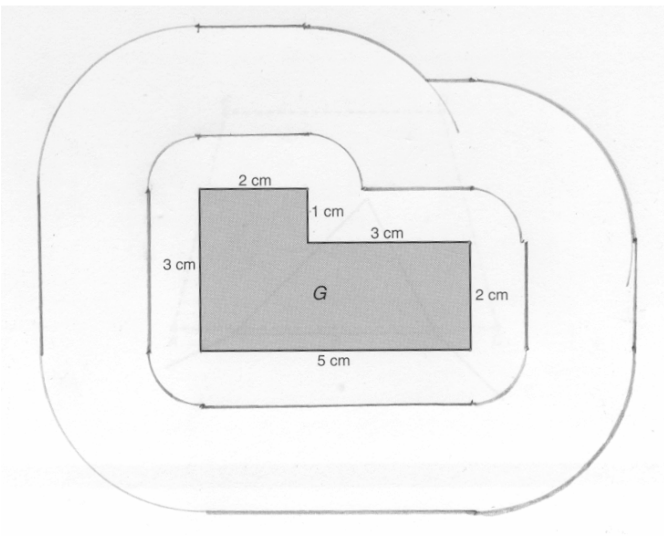
13a. De hoekpunten van het blauwe gebied hebben niet allemaal de afstand 1 tot het vierkant. Het hoekpunt heeft bijv. een afstand van √2 tot het vierkant. (Pyth.)

b. Er moeten 4 kwartcirkels met straal 1 bij de 4 hoekpunten komen.

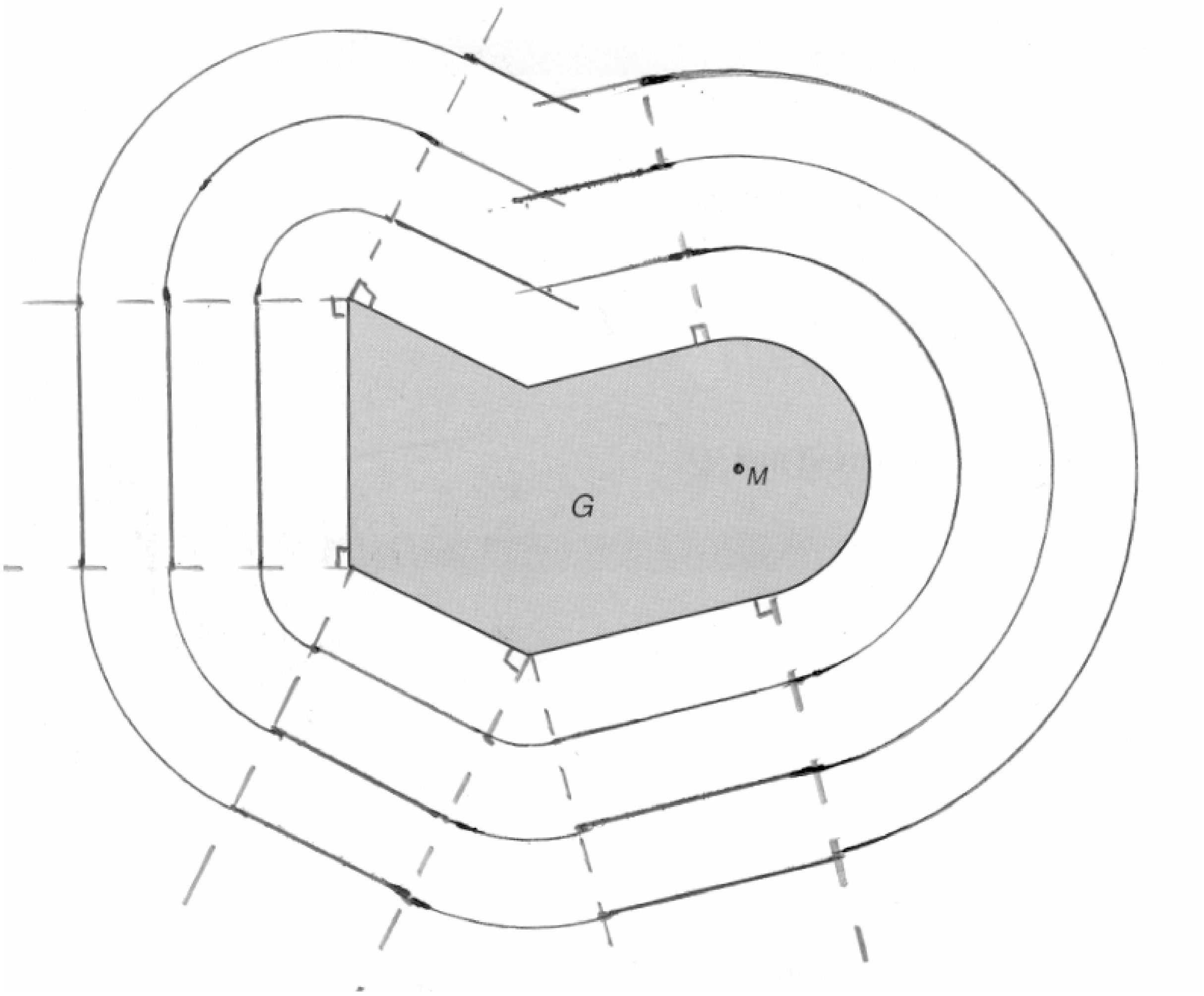
14a. Kwartcirkels moeten komen bij de hoekpunten A , B , C , E en F. Bij punt E zou er een kleinere cirkelboog moeten komen.

b. Nu komt er ook bij punt E een kwartcirkel.

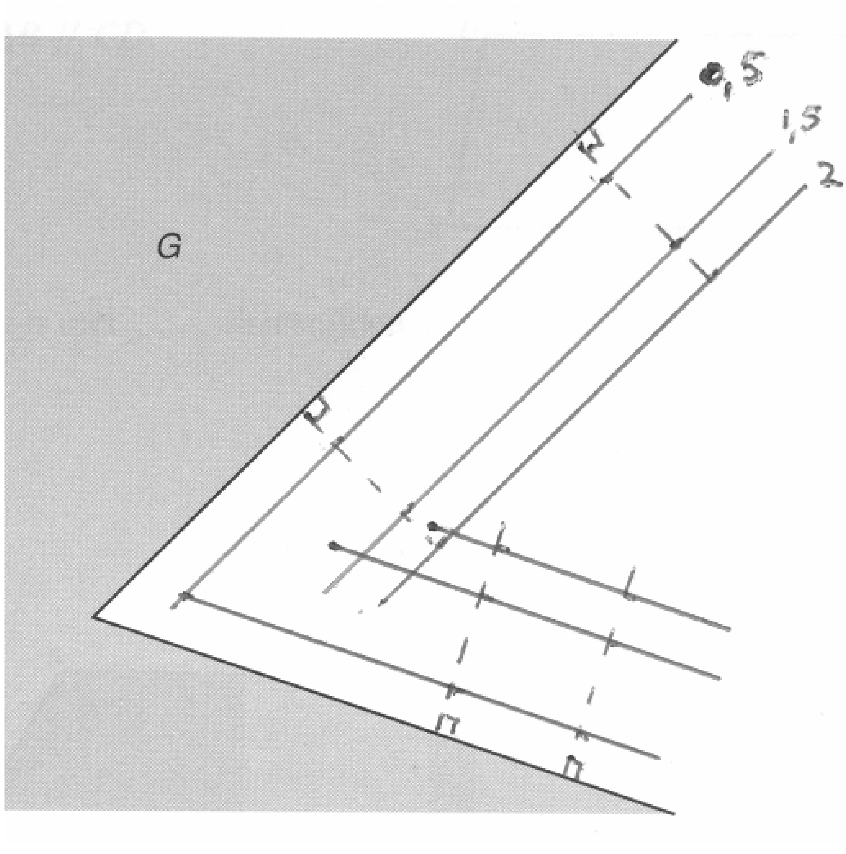
15.



16.

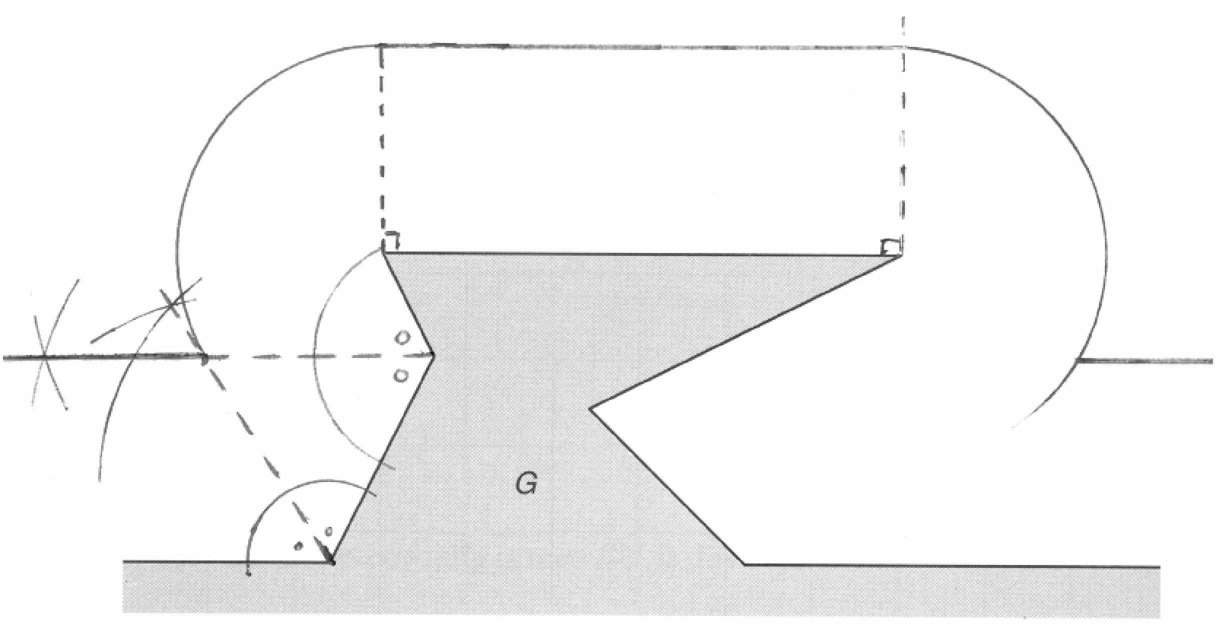


17a.



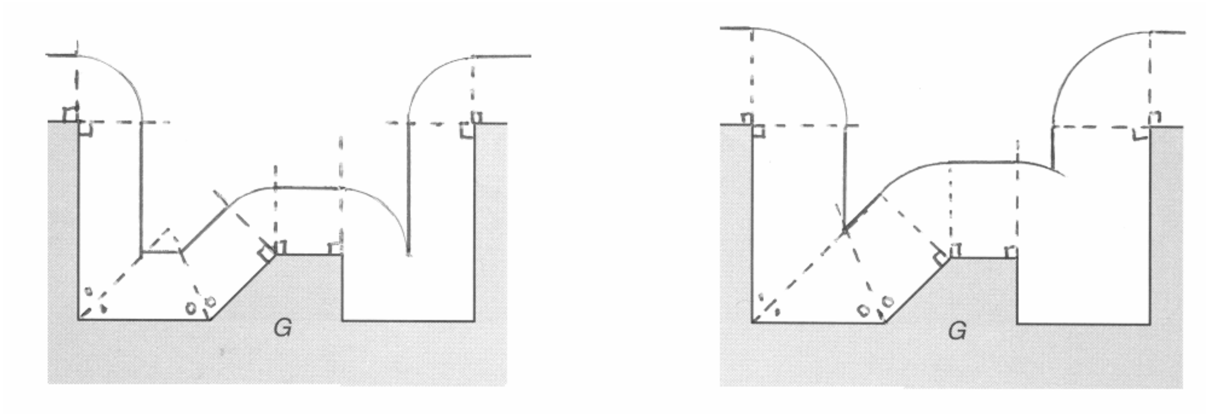
b. De knikken liggen op de bissectrice van de inwendige hoek. De afstand tot de benen is dan namelijk gelijk.

18



De isolijn verkrijg je door bij de linkse inham de beide bissectrices met elkaar te snijden. Vervolgens kan je de isolijn verder tekenen.

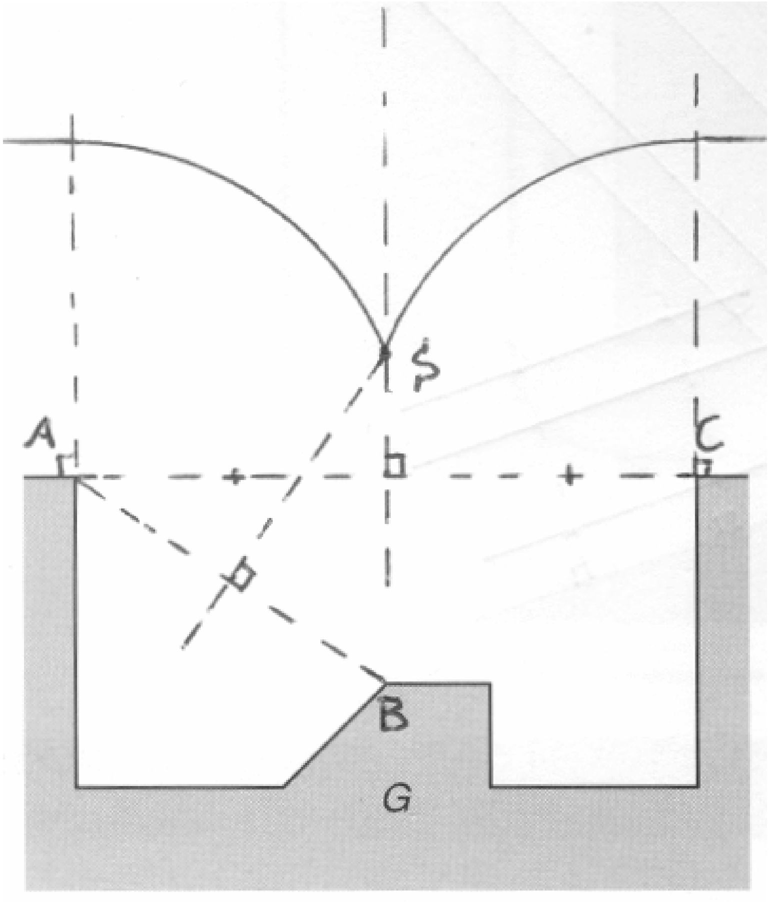
19a en b.



a. Bij de linkse figuur krijg je de kleinste afstand met 3 knikken door in de rechtse inham te meten en te halveren. De knik verdwijnt het eerst in de rechtse inham.

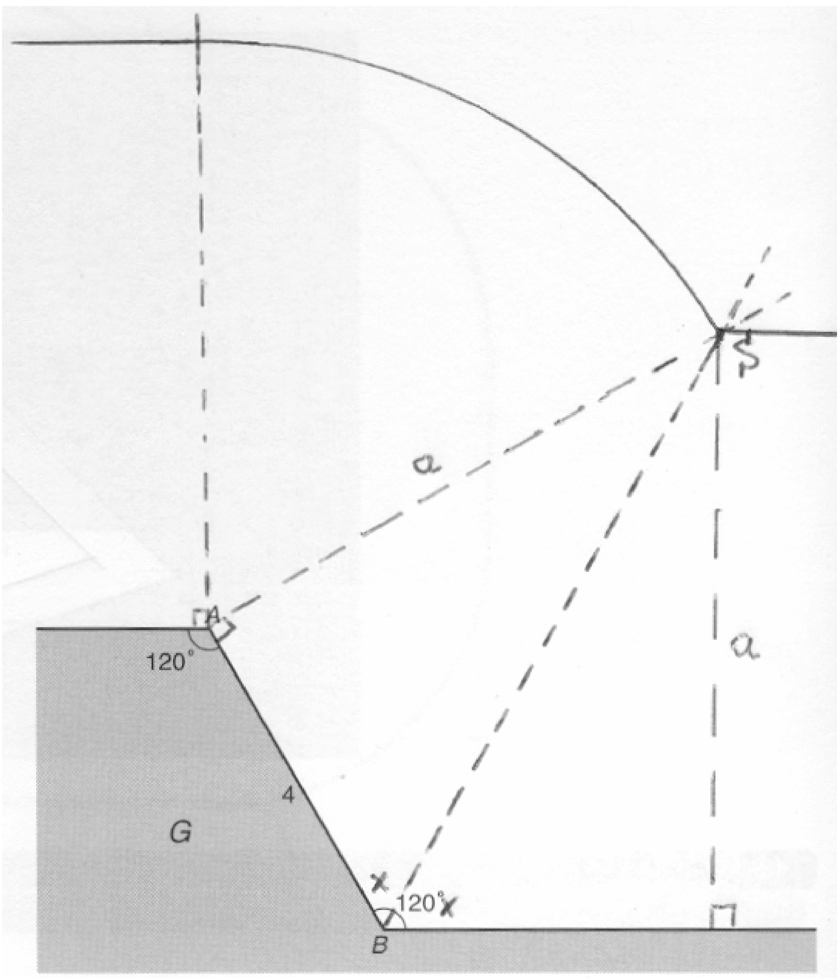
b. In de rechtse figuur krijg je twee knikken door de beide bissectrices met elkaar te snijden en vervolgens verder de isolijn te tekenen.

19c.



Punt B blijkt precies in het midden te liggen tussen de twee opstaande zijden. De invloed van het horizontale lijnstukje verdwijnt door het snijpunt te van de middelloodlijn te vinden van AB en van AC. Zo krijg je punt S. Vervolgens zie je in de tekening hoe de rest van de isolijn verkregen wordt.

20a.



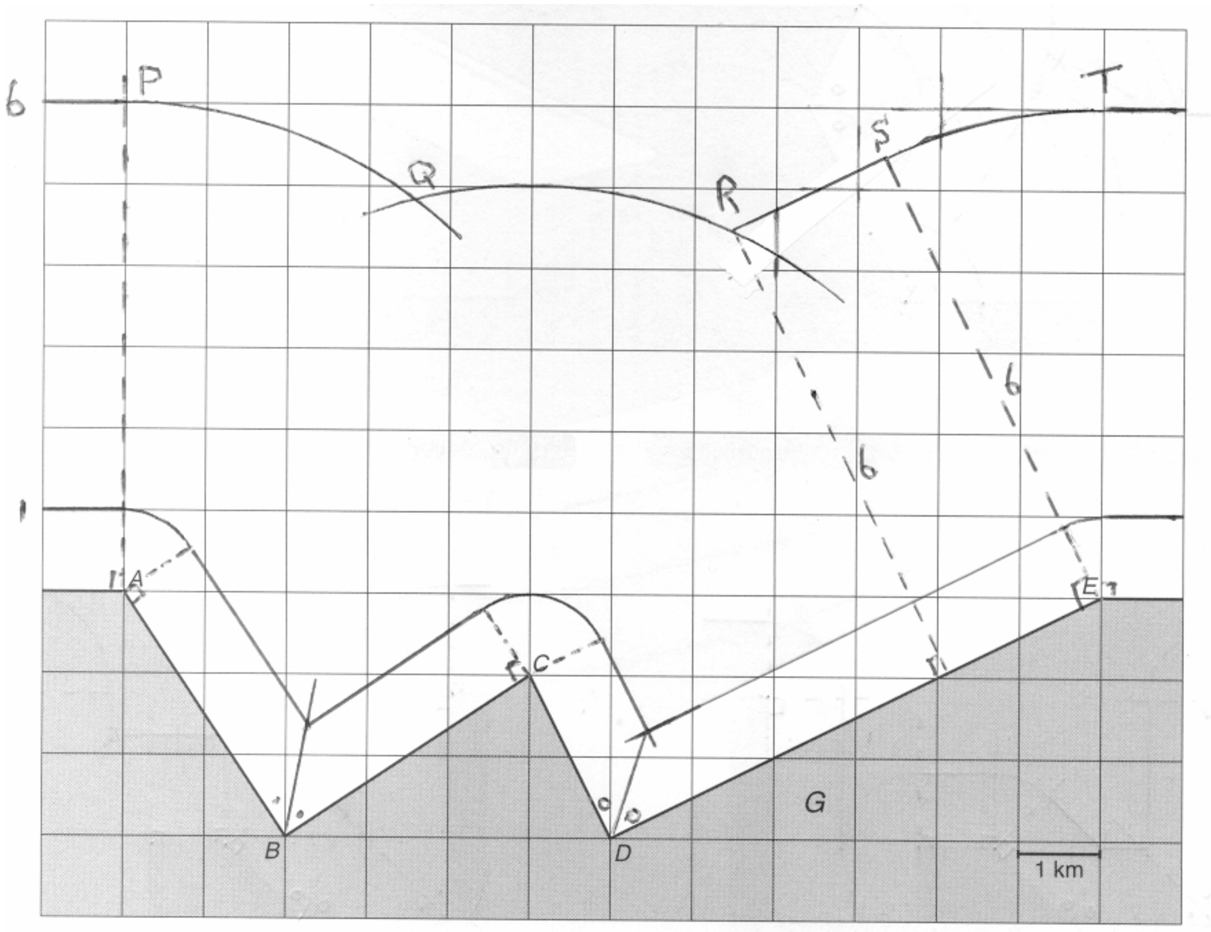
Het punt S wordt verkregen door de loodlijn vanuit punt A te snijden met de bissectrice van hoek B. Op dat moment verdwijnt de invloed van lijnstuk AB.

b. Aangezien er een bissectrice is bij hoek B geldt er:

tan 60º = a/4 ⇔

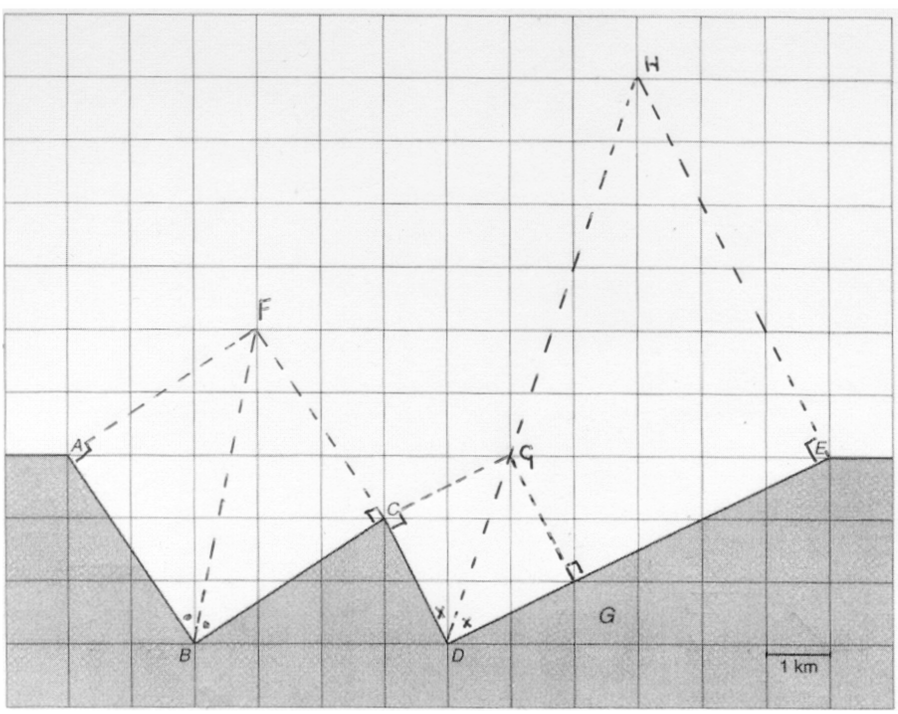
a = 4 . tan 60º = 4√3

21a.



Let op het rechte stuk van R naar S . Links hebben de stukken AB en BC geen invloed meer. Punt Q heeft een afstand van 6 tot A en C.

21b.



De invloed van de lijnstukken AB en BC “verdwijnen “ als de deellijn van hoek B de loodlijnen AF en CF snijdt. Er geldt: $AB^2 = BC^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow AB = BC = \sqrt{13}$ Aangezien vierhoek ABCF een vierkant is geldt dus $AF = BC = \sqrt{13} \Rightarrow$ de rechte stukken AB en BC “verdwijnen” dus op een afstand van $\sqrt{13}$.

Invloed van lijnstuk CD “verdwijnt” als de deellijn van hoek D de loodlijn vanuit C snijdt.
Er geldt: $CD^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow CD = \sqrt{5}$ Aangezien er weer een vierkant is geldt dat $CD = CG = \sqrt{5} \Rightarrow CD$ “verdwijnt” als de afstand $\sqrt{5}$ is.

De invloed van *DE* “verdwijnt” als de deellijn vanuit hoek D de loodlijn vanuit E snijdt $\Rightarrow$ punt H.
Er geldt: $DE^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow DE = \sqrt{45} = \sqrt{9}\,.\,\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ Aangezien er weer sprake is van een vierkant geldt dus weer $DE = EH = 3\sqrt{5} \Rightarrow$ Lijnstuk *DE* “verdwijnt” als de afstand $3\sqrt{5}$ is.

21c. Op grote afstand (bijv. 20 km) hebben alleen invloed de lijn links van A, het punt A zelf , het punt E en vervolgens de lijn rechts van punt E.
We krijgen als isolijn eerst een stuk lijn evenwijdig met de lijn links van A dan een cirkelboog met middelpunt A en vervolgens weer een cirkelboog met middelpunt E en dan weer een lijn evenwijdig met de lijn rechts van E.

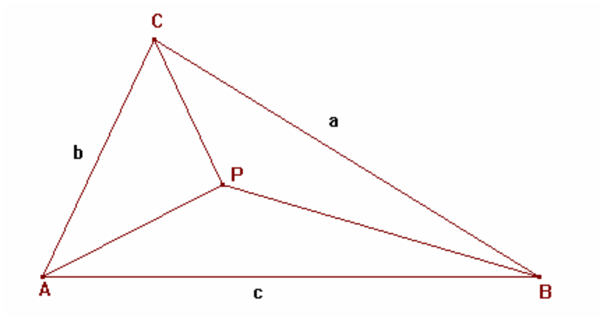
22.

a. $$\left.\begin{array}{l} AD^2 + CD^2 = AC^2 \\ CD > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow AC^2 > AD^2 \Rightarrow AC > AD$$

b. $$\left.\begin{array}{l} BD^2 + CD^2 = BC^2 \\ CD > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow BC^2 > BD^2 \Rightarrow BC > BD$$

c. $$\left.\begin{array}{l} AC > AD \\ BC > BD \end{array}\right\} \Rightarrow AC + BC > AD + BD \Leftrightarrow AC + BC > AB$$

23

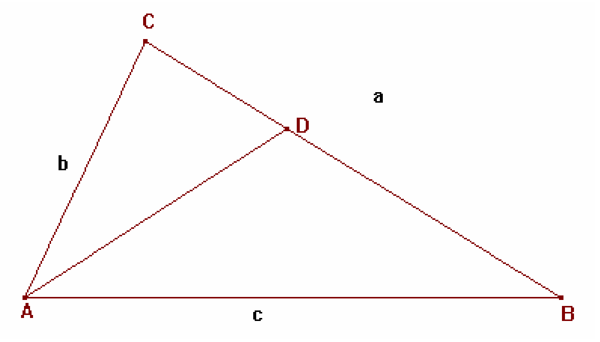


Gegeven: Δ ABC en punt P binnen de driehoek.

Te bew. $PA + PB + PC > s$

Bewijs:
$$\left.\begin{array}{l} AP + BP > c(stelling) \\ BP + CP > a(stelling) \\ CP + AP > b(stelling) \end{array}\right\} \Rightarrow 2AP + 2BP + 2CP > a + b + c \Rightarrow$$
$2.(AP + BP + CP) > a + b + c \Leftrightarrow AP + BP + CP > 0{,}5.(a + b + c) \Leftrightarrow AP + BP + CP > s$

24.



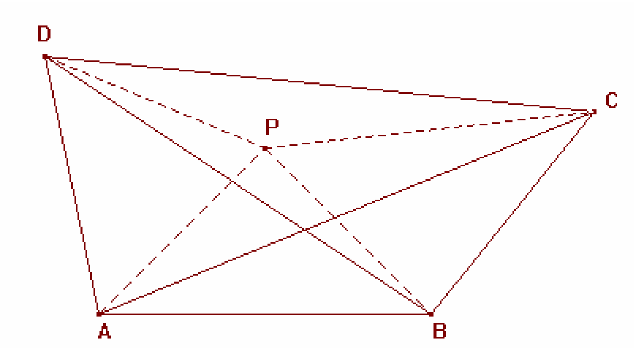
Gegeven: Δ ABC met D op BC.

Te bew. AD < s

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} AD < b + CD(stelling) \\ AD < c + BD(stelling) \end{array}\right\} \Rightarrow 2.AD < b + CD + c + BD \Leftrightarrow$

$2AD < (CD+BD) + b + c \Leftrightarrow 2AD < a + b + c \Leftrightarrow AD < 0{,}5(a + b + c) \Leftrightarrow AD < s$

25.

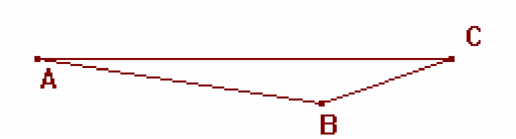


Gegeven: vierhoek ABCD en punt P binnen de vierhoek , maar niet op AC of BD.

Te bew. $AP+BP+CP+DP > BD + AC$

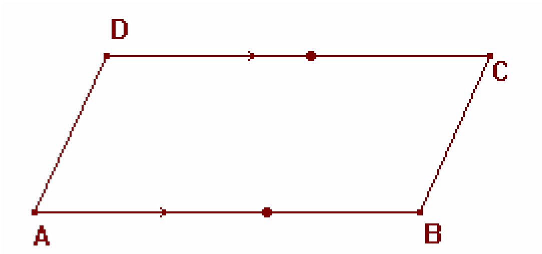
Bewijs: $\left.\begin{array}{l} AP + CP > AC(stelling) \\ DP + BP > BD(stelling) \end{array}\right\} \Rightarrow AP + CP + DP + BP > AC + BD$

26a.b.



Stel B ligt niet op AC dan geldt de driehoeksongelijkheid ⇒ AB + BC > AC en dit is in strijd met het gegeven. ⇒ De veronderstelling dat B niet op AC ligt is dus niet correct ⇒ B moet op AC liggen. Dus is de stelling hiermee bewezen.

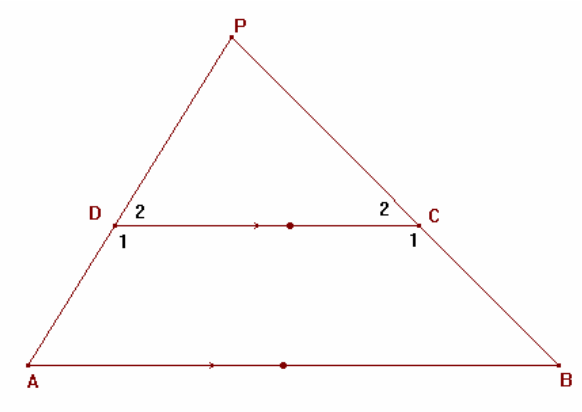
27.



Gegeven: AB = CD en AB // CD

Te bew. AD // BC

Bewijs: Stel dat AD is niet evenwijdig met BC $\Rightarrow$ AD snijdt BC in bijvoorbeeld het punt P.

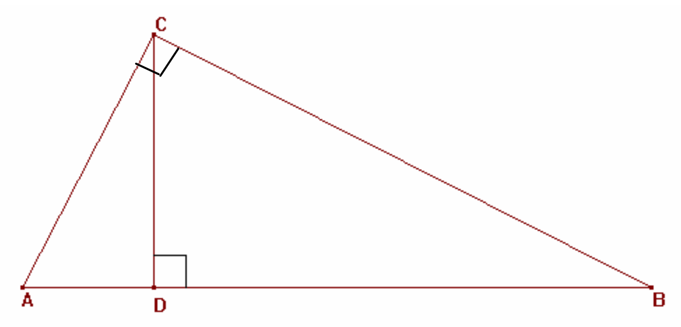


$$\left.\begin{array}{l}\angle P = \angle P \\ \angle A \ = \angle D_2 (F - hoeken)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABP \sim \Delta DCP(hh) \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AP}{DP}$$ Aangezien AB = CD zou dus AP gelijk moeten zijn aan DP en dat is niet waar $\Rightarrow$ De gemaakte veronderstelling dat AD niet evenwijdig is met BC is dus niet waar $\Rightarrow$ AD // BC.

28a.

Gegeven Δ ABC met $\angle$ ACB = 90°

Te bew. $BC^2 + AC^2 = AB^2$



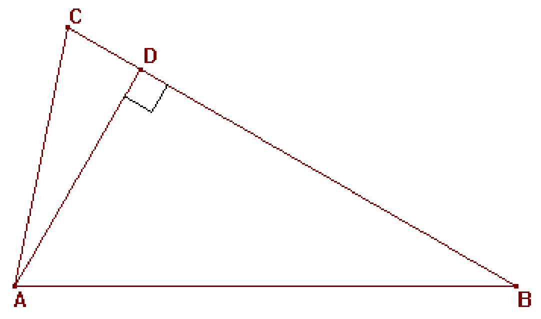
Bewijs: Teken $CD \perp$ AB. Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle A \\ \angle C = \angle D(90^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta ADC(hh) \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC^2 = AD.AB(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle B \\ \angle C = \angle D(90^\circ)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta CDB(hh) \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BC^2 = AB.BD(2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $AC^2 + BC^2 = AD.AB + BD.AB = (AD + BD).AB = AB.AB = AB^2$
Hetgeen te bewijzen was.

b.



Gegeven Δ ABC met $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Te bew. $\angle C = 90^o$

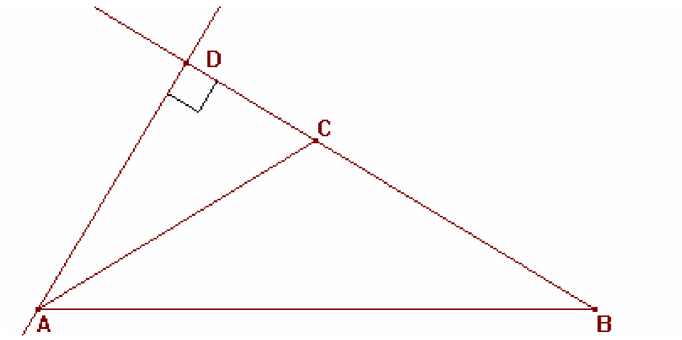
Bewijs: Stel $\angle C < 90^o$ Dan snijdt de hoogtelijn uit punt A lijn BC tussen B en C in punt D.

Nu kunnen we Pyth. toepassen in de twee rechthoekige driehoeken. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} In\ \Delta ACD:\ AC^2 = AD^2 + CD^2 \\ In\ \Delta ADB:\ AB^2 = AD^2 + BD^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AC^2 - AB^2 = CD^2 - BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 + BD^2 - CD^2 = AC^2 + (BD - CD)(BD + CD) =$$
$$AC^2 + (BD - CD)BC < AC^2 + BC^2$$

Dit is in tegenspraak met het gegeven $\Rightarrow \angle C \geq 90^o$



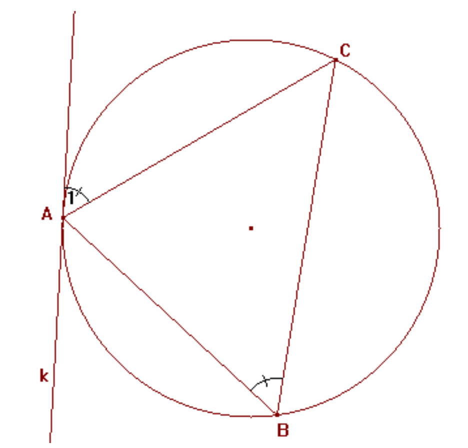
Stel nu dat $\angle C > 90^o$ dan komt de hoogtelijn van $\angle A$ uit in een punt D op het verlengde van BC.

$$\left.\begin{array}{l} In\ \Delta ACD:\ AC^2 = AD^2 + CD^2 \\ In\ \Delta ADB:\ AB^2 = AD^2 + BD^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AC^2 - AB^2 = CD^2 - BD^2 \Rightarrow$$

$$AB^2 = AC^2 + BD^2 - CD^2 = AC^2 + (BD + CD)(BD - CD) \Rightarrow$$
$$AB^2 = AC^2 + (BD + CD).BC > AC^2 + BC^2$$

Ook dit is in tegenspraak met het gegeven $\Rightarrow$ de veronderstelling $\angle C > 90^o$ is dus niet juist.
$\Rightarrow \angle C$ is dus 90^o.

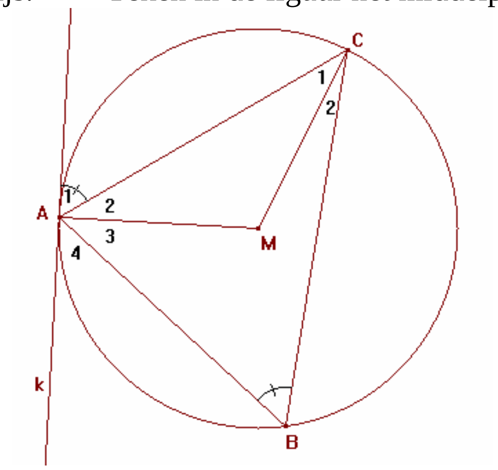
29.



Gegeven: Gegeven een cirkel , de raaklijn k in punt A en een willekeurig punt B op de cirkel.

Te bew. $\angle A_1 = \angle ABC$

Bewijs. Teken in de figuur het middelpunt M en de stralen AM en CM . (zie de figuur)



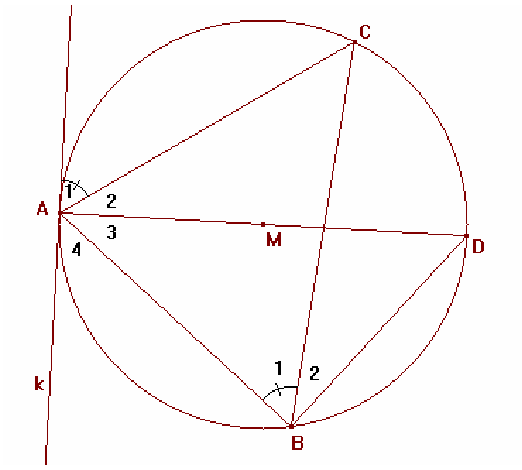
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_2 = \angle C_1 (AM = CM) \\ \angle A_2 + \angle C_1 + \angle AMC = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}2.\angle A_2 + \angle AMC = 180^\circ \Rightarrow \angle A_2 = 90^\circ - \frac{1}{2}.\angle AMC \\ \angle A_2 = 90^\circ - \angle A_1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle AMC \\ \angle ABC = \frac{1}{2}.\angle AMC (omtrekshoek)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

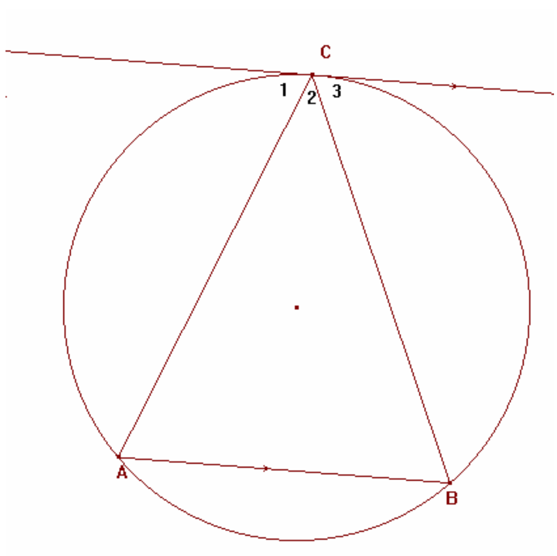
$$\angle A_1 = \angle ABC$$

b. Nu is hetzelfde gegeven , maar gaan we de stelling bewijzen m.b.v. Thales.
Teken middellijn AD en lijnstuk BD.



$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 + \angle A_2 = 90^\circ (raaklijn) \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 90^\circ (Thales) \\ \angle A_2 = \angle B_2 (zelfde\ boog)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle B_1$$

30.

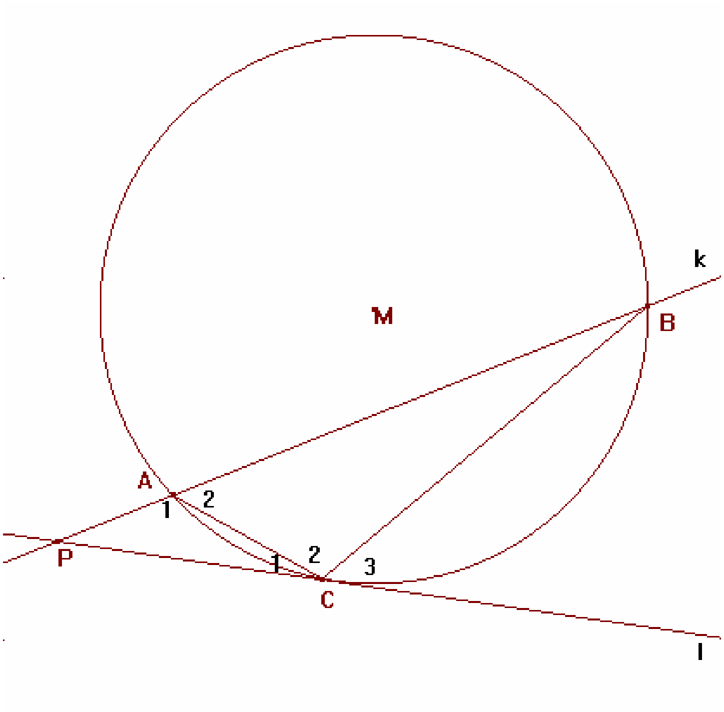


Gegeven: Cirkel met daarop de punten A , B , C. Raaklijn in C is evenwijdig met AB.

Te bew. Δ ABC is gelijkbenig

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle C_3 (z-hoek) \\ \angle A = \angle C_3 (zie\ som\ 29)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle B \Rightarrow \Delta ABC$ is gelijkbenig.

31.



Gegeven:

P buiten de cirkel ; lijn k snijdt de cirkel in A en B en lijn l is een raaklijn aan de cirkel met raakpunt C.

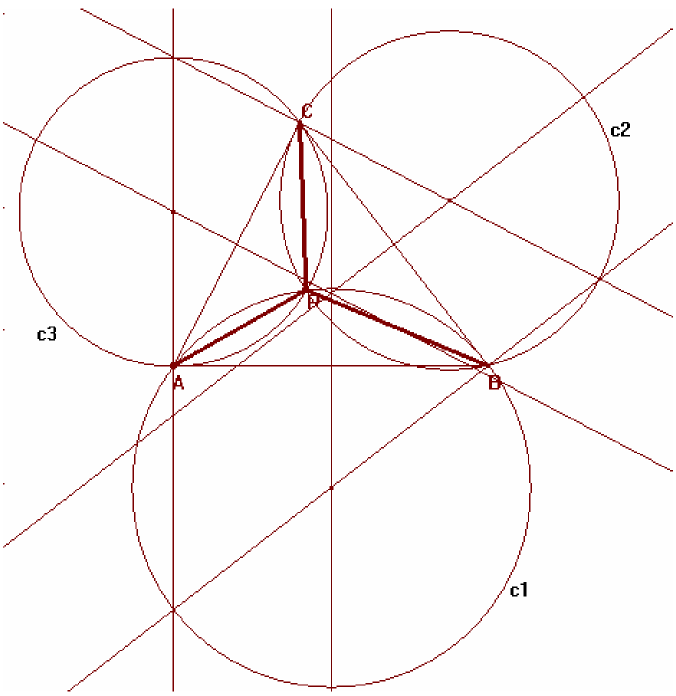
Te bew.
$PA \, . \, PB = PC^2$

Bewijs: Teken AC en BC. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle A_2 = \angle C_3 (gelijke\ boog) \\ \angle C_{12} + \angle C_3 = 180^\circ \\ \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_{12} \\ \angle P = \angle P \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PAC \sim \Delta PCB \text{ (hh)} \Rightarrow$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC^2$$

32.



a. Zie figuur

b. Het vermoeden is, dat de drie cirkels elkaar snijden in één punt P.

c. Zo te zien geldt waarschijnlijk :
$\angle APC = \angle CPB = \angle BPA$

33. Gegeven dezelfde figuur als bij opgave 32.

a. $\angle PAB = \angle PBC$ want deze hoeken gaan naar dezelfde boog PB.

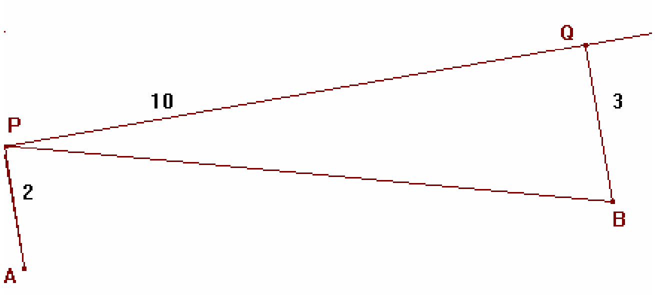
b. Zo geldt ook $\angle PBC = \angle PCA$ want deze hoeken gaan naar dezelfde boog PC in cirkel c2. In cirkel c3 geldt vervolgens ook: $\angle PCA = \angle PAB$ want deze hoeken gaan naar dezelfde boog AP.

c. Stel een punt S is het snijpunt van de cirkels c1 en c2. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ op c1 } \Rightarrow \angle SAB = \angle SBC \\ S \text{ op c2 } \Rightarrow \angle SBC = \angle SCA \end{array}\right\} \Rightarrow \angle SAB = \angle SCA \Rightarrow S \text{ ook op c3 } \Rightarrow \text{S en P blijken dus}$$

hetzelfde punt te zijn $\Rightarrow$ de drie cirkels gaan dus door één punt.

34. a.



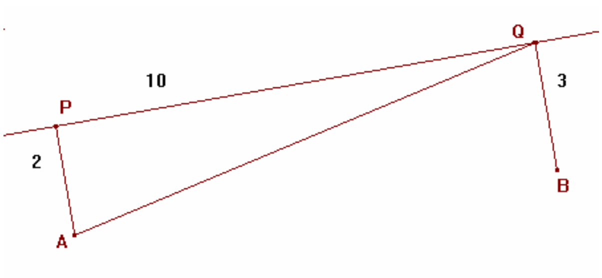
Via P:$\Rightarrow$

$PB^2 = 100 + 9 = 109 \Rightarrow PB = \sqrt{109}$

$\Rightarrow$ De route van A naar B is dan :

AP + PB = 2 + $\sqrt{109} \approx 12{,}440$

b.



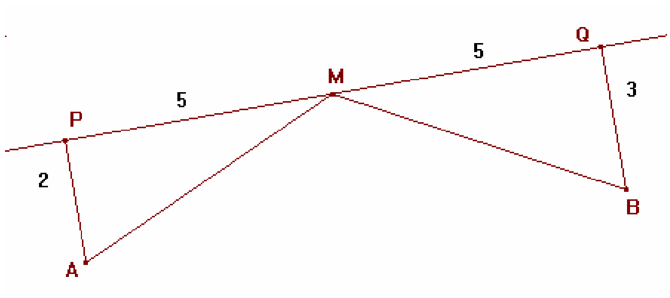
Via Q : $\Rightarrow$

$AQ^2 = 4 + 100 = 104 \Rightarrow AQ = \sqrt{104} \Rightarrow$

De route van A naar B via Q is dus:

AQ + QB = $\sqrt{104} + 3 \approx 13{,}198$

c.



Via het midden M $\Rightarrow$

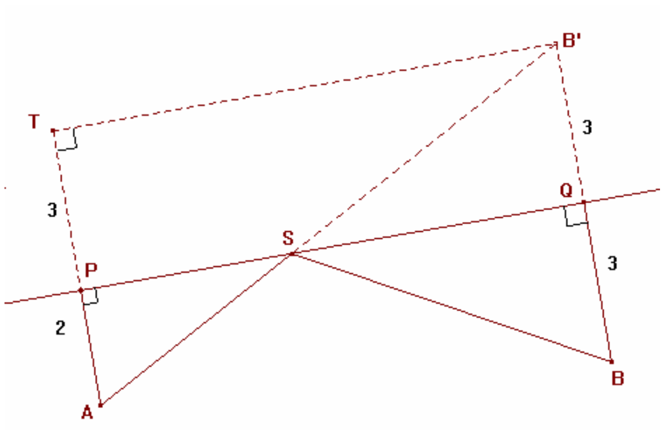
$AM^2 = 4 + 25 = 29 \Rightarrow AM = \sqrt{29}$

$MB^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow MB = \sqrt{34} \Rightarrow$

De route van A via M naar B is :

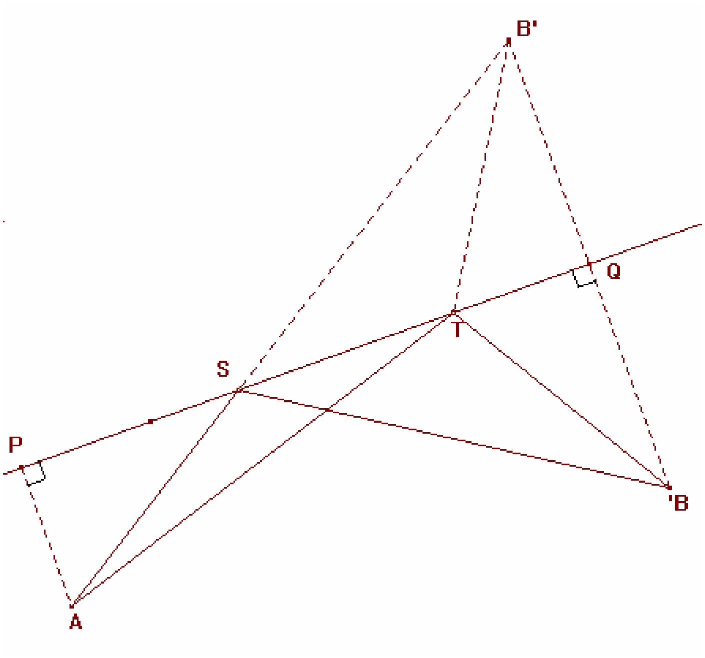
AM + MB = $\sqrt{29} + \sqrt{34} \approx 11{,}216$

d.



Door spiegeling geldt: BS = B'S $\Rightarrow$
AS = BS = AS + B'S = AB'
Teken vervolgens een rechthoekige driehoek ATB' om met Phytagoras de lengte AB' te berekenen. $\Rightarrow$
$AB'^2 = AT^2 + B'T^2 = 25 + 100 = 125 \Rightarrow$
AB'= $\sqrt{125} \approx 11{,}180$ $\Rightarrow$ De route AS + SB is dus ongeveer 11,180

e.



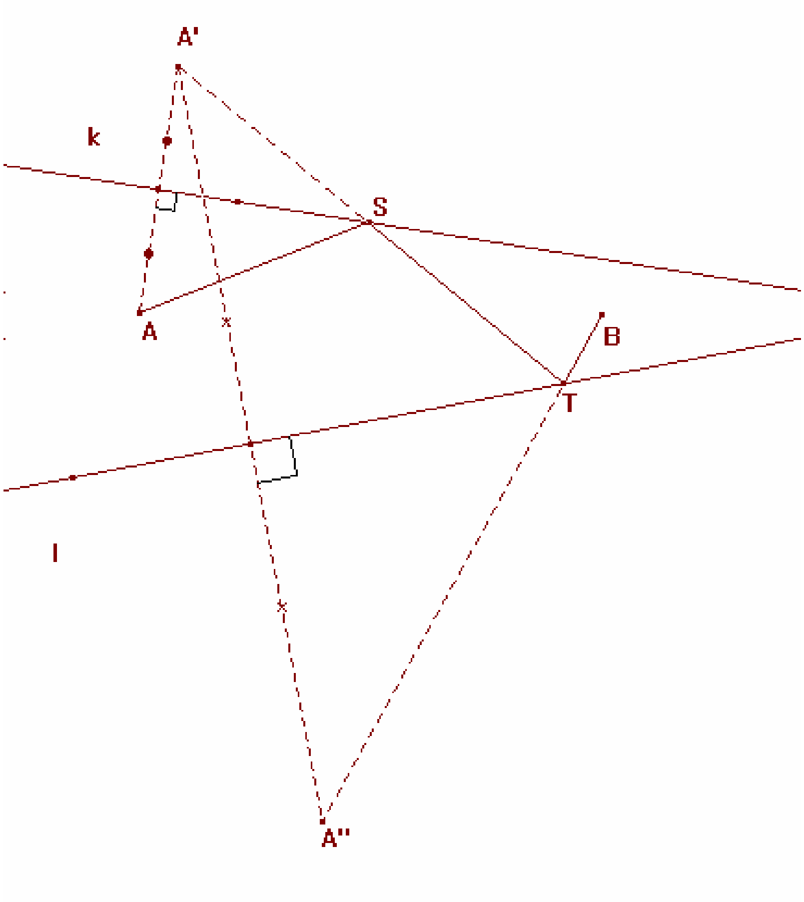
Neem een tweede punt T op de lijn , maar niet in S. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AS + BS = AS + B'S = AB' \\ AB' < AT + TB'(driehoeksongelijkheid) \\ TB' = TB \Rightarrow AT + TB' = AT + TB \end{array}\right\} \Rightarrow AS + BS < AT + TB \quad \Rightarrow$$

De route van A naar B via S is dus minimaal.

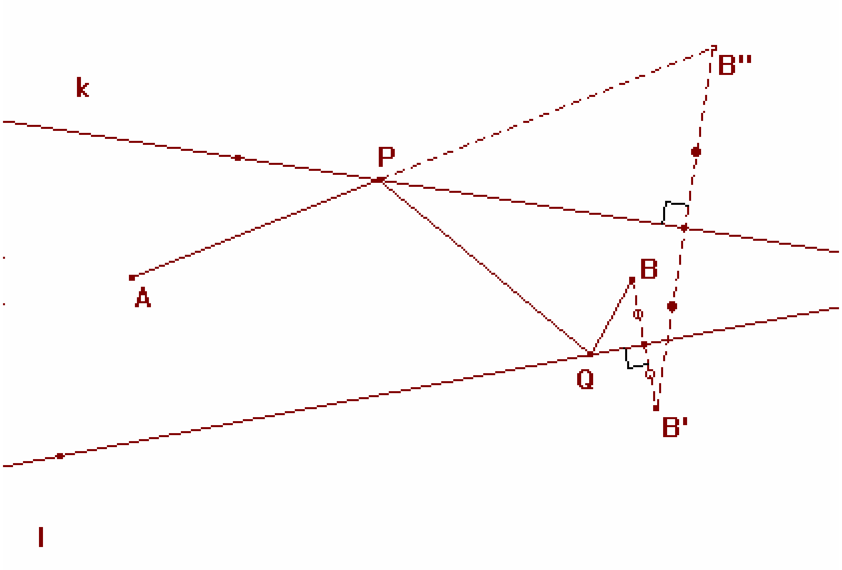
f.
$$\left.\begin{array}{l} \angle B'SQ = \angle BSQ(spiegelen) \\ \angle B'SQ = \angle PSA(overstaande\ hoeken) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle PSA = \angle QSB$$

35.
a.



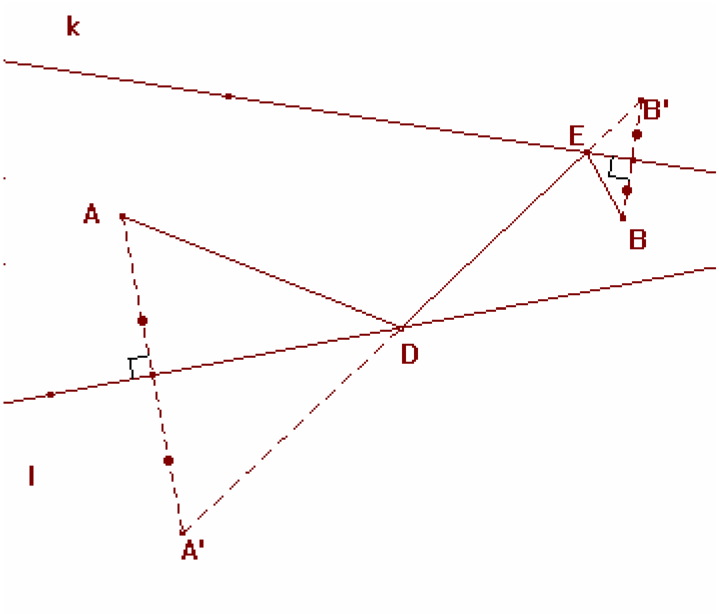
De gevraagde route is ASTB.

b.



De gevraagde route is:
APQB.

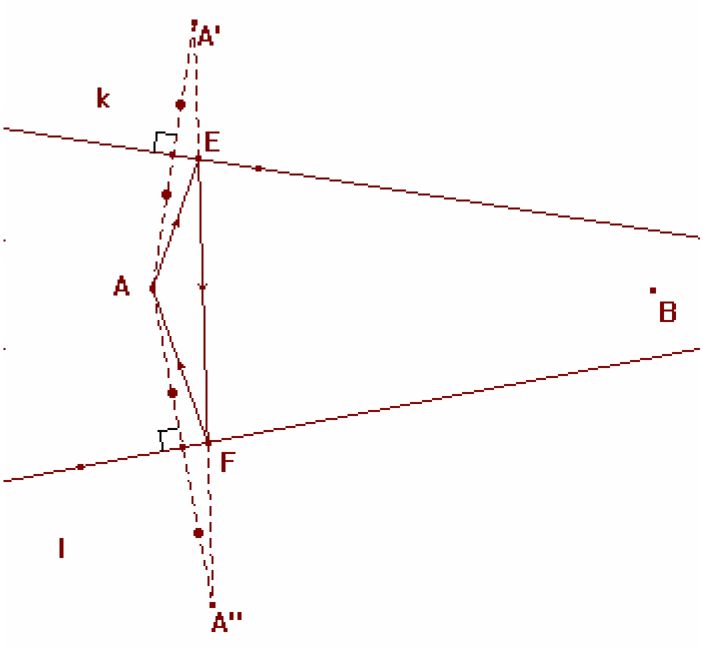
35c.



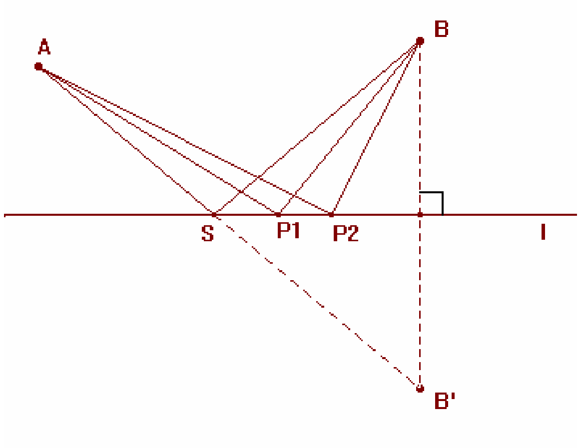
De gevraagde route is:
ADEB.

35d.

De gevraagde route is:AEFA

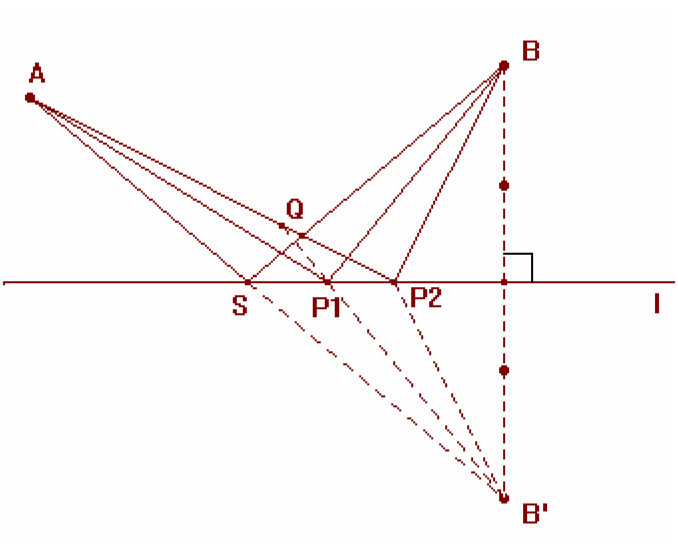


36



Gegeven:
A en B aan dezelfde kant van l en punt S op l zodat AS + BS minimaal is.
Verder liggen de punten P_1 en P_2 ook aan dezelfde kant van punt S zodat $SP_2 > SP_1$

Te bew.
$AP_2 + P_2B > AP_1 + P_1B$



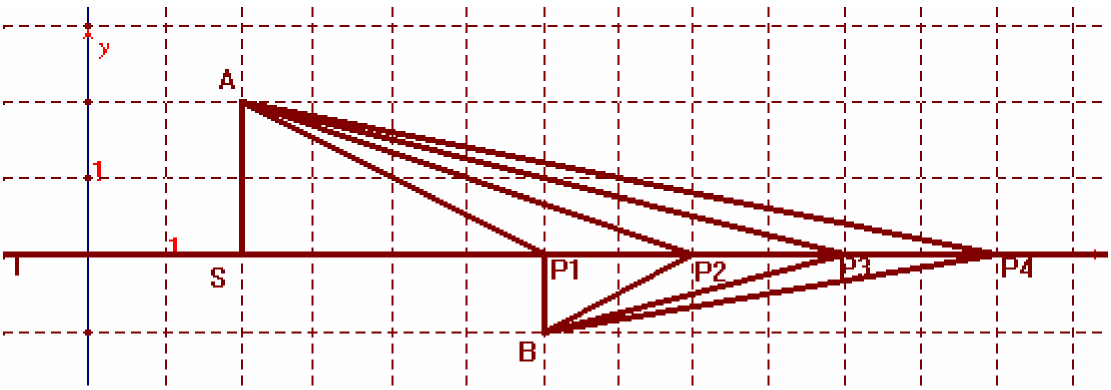
Bewijs: Teken P_2 B' en teken B'P_1 en het verlengde ervan zodat Q het snijpunt is met $AP_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AP1 + BP1 = AP1 + B'P1 \\ AP1 < AQ + QP1 (driehoeksongelijkheid) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} AP1 + BP1 < AQ + QP1 + B'P1 \Rightarrow AP1 + BP1 < AQ + QB' \\ QB' < QP2 + B'P2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} AP1 + BP1 < AQ + QP2 + B'P2 \\ AQ + QP2 = AP2 \\ B'P2 = BP2 \end{array}\right\} \Rightarrow AP1 + BP1 < AP2 + BP2$$

37a.



We gaan steeds in driehoek ASPn Pythagoras toepassen en zo de lengte van de route berekenen.

ΔASP1: $AP1^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow AP1 = \sqrt{20}$ $BP1 = 1 \Rightarrow AP1 - BP1 = \sqrt{20} - 1 \approx 3{,}472$

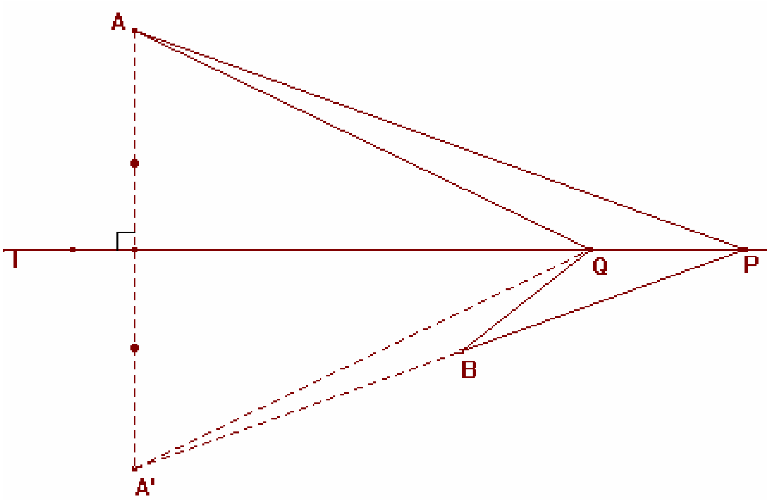
ΔASP2: $AP2^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow AP2 = \sqrt{40}$ en in Δ BP1P2: $BP2^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BP2 = \sqrt{5} \Rightarrow$
$AP2 - BP2 = \sqrt{40} - \sqrt{5} \approx 4{,}088$

ΔASP3: $AP3^2 = 4 + 64 = 68 \Rightarrow AP2 = \sqrt{68}$ en in Δ BP1P3:
$BP3^2 = 16 + 1 = 17 \Rightarrow BP3 = \sqrt{17} \Rightarrow AP2 - BP2 = \sqrt{68} - \sqrt{17} \approx 4{,}123$

ΔASP4: $AP4^2 = 4+100 = 104 \Rightarrow AP4 = \sqrt{104}$ en in Δ BP1P4:
$BP4^2 = 36+1 = 37 \Rightarrow BP4 = \sqrt{37} \Rightarrow AP4 - BP4 = \sqrt{104} - \sqrt{37} \approx 4{,}115$

Uit deze berekeningen volgt dus dat de APn – BPn maximaal is voor n = 3.

b.



Gegeven:
lijn l en de punten A en B aan weerskanten van l. A'is spiegelbeeld van A in lijn l.

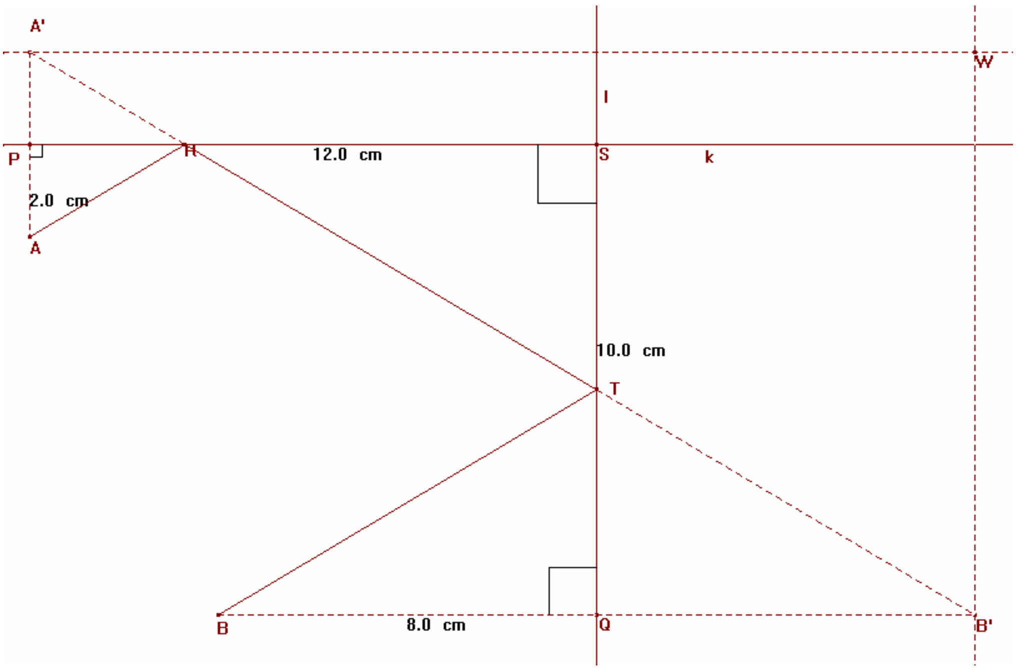
Te bew.
De afstand $AP - BP$ is maximaal als punt P het snijpunt is van $A'B$ met lijn l.

Bewijs: $AP - BP = A'P - BP = A'B$ Neem een willekeurig punt Q op lijn l , maar niet in P. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AQ - BQ = A'Q - BQ \\ A'Q < A'B + BQ \end{array}\right\} \Rightarrow AQ - BQ < A'B + BQ - BQ = A'B$$

Aangezien $AP - BP = A'B$ geldt dus : $AQ - BQ < AP - BP \Rightarrow AP - BP$ is maximaal voor het snijpunt P van $A'B$ met l.

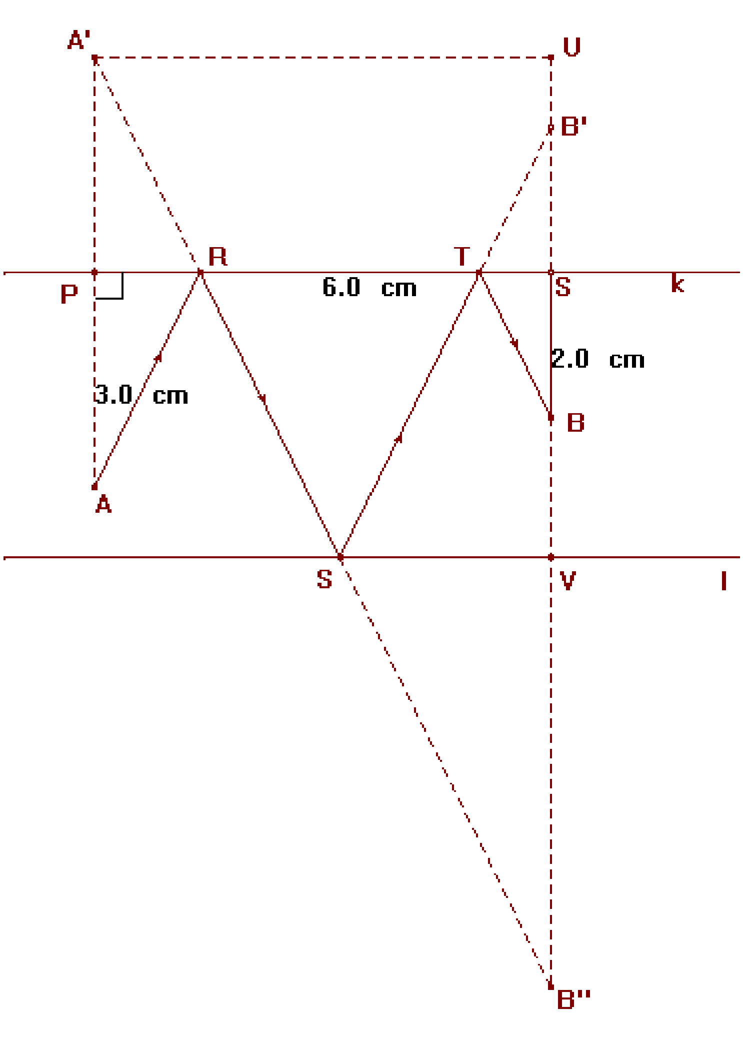
38a.



De route is:
ARTB

b. Door het spiegelen geldt: $AR = AR'$ en $BT = B'T \Rightarrow$ route $ARTB = A'RTB' = A'B'$
In Δ A'WB': A'W = 12 + 8 = 20 en WB'= 2 + 10 = 12 $\Rightarrow$ De lengte van de route is dus:
$\sqrt{(20^2 + 12^2)} = \sqrt{544} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{34} = 4\sqrt{34}$

39a.



De route is : *ARSTB*

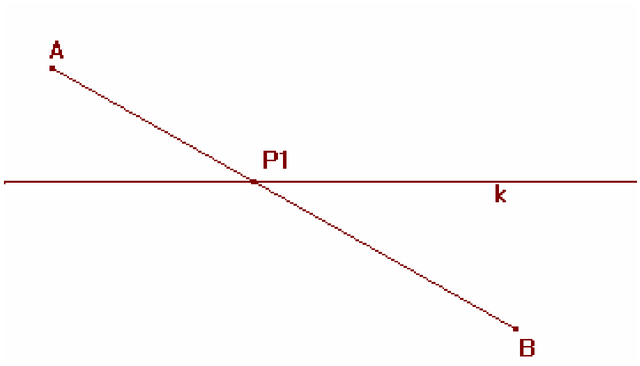
b. *AR* = *A'R* en *TB* = *TB'*
Verder geldt: *ST* + *TB* = *SB'*=*SB''*
$\Rightarrow$
ARSTB = *A'RSB''* = *A'B''*

Nu kijken in Δ *A'UB''* $\Rightarrow$
A'U = 6 en UB'' = 3 + 4 +VB'' = 7 + VB'= 7 +4 + 2 = 13
Nu Pyth. in Δ A'UB'' $\Rightarrow$

$A'B''^2 = 36 + 169 = 205 \Rightarrow$
A'B'' = √205 $\Rightarrow$ De lengte van de gevraagde route is dus √205

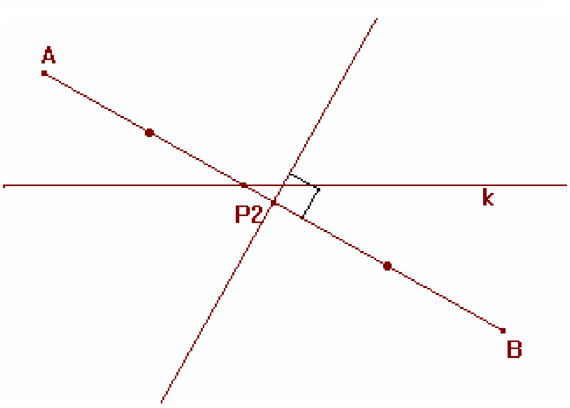
Opmerking : Het punt S tussen B en B' moet eigenlijk punt Q zijn.

40a.



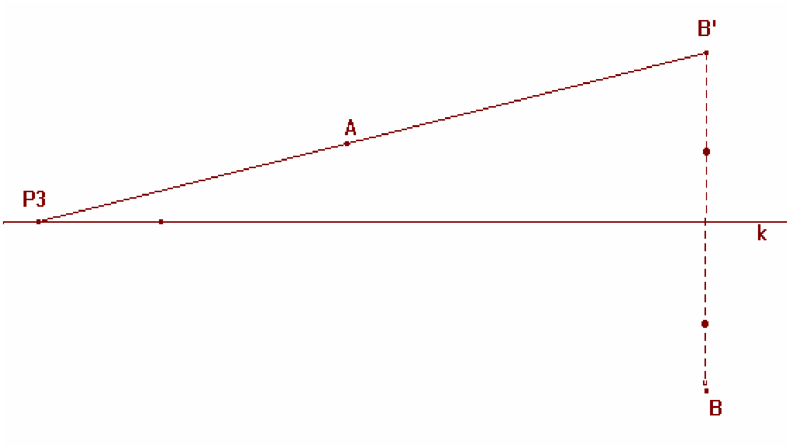
Punt P_1 is het snijpunt van *AB* met *k*.

b.



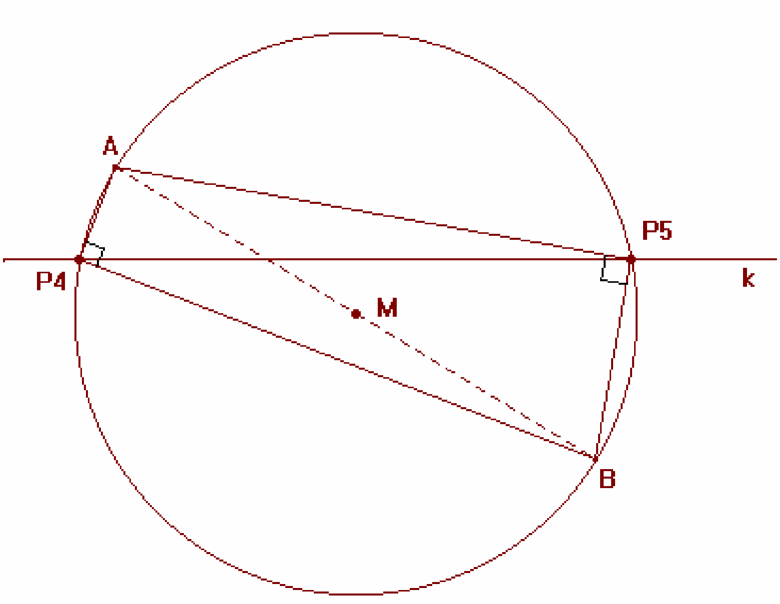
Punt P_2 is het snijpunt van lijn *k* met de middelloodlijn van AB.

c.



$BP_3 - AP_3 = B'P_3 - AP_3$ is minimaal als de 3 punten op één lijn liggen. $\Rightarrow$ P_3 is het snijpunt van *AB*'met *k*.

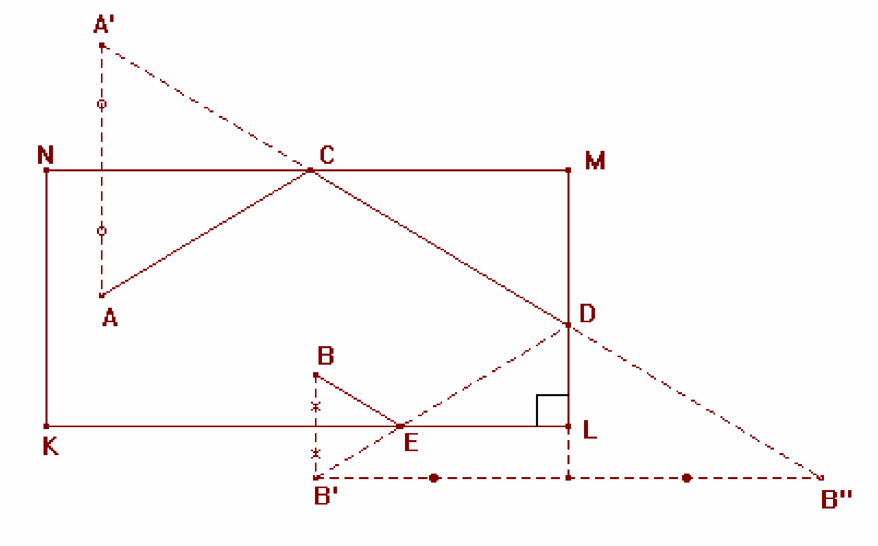
d.



Aangezien de hoeken 90° moet zijn , gaan we dus denken aan de omgekeerde stelling van Thales.
AB is dus middellijn van de cirkel.

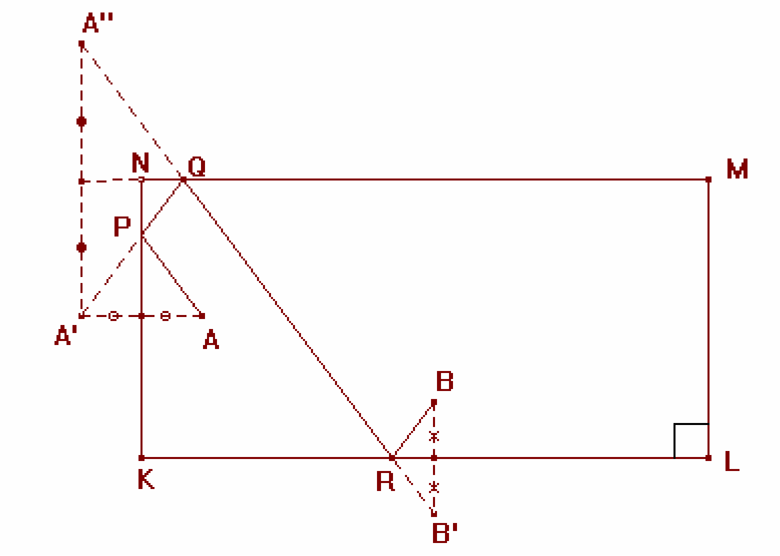
Nu geldt dus: $\angle AP_4B = \angle AP_5B = 90°$

41a.



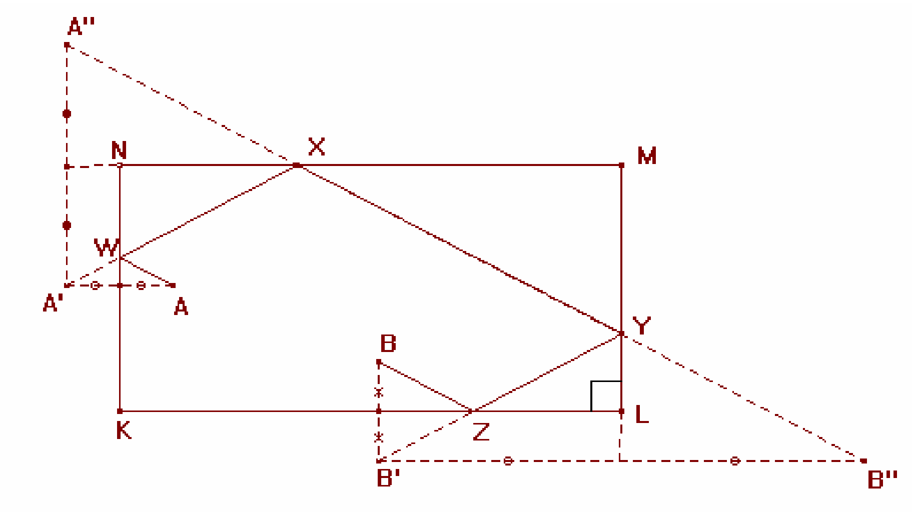
Punt A 1 keer spiegelen en punt B twee keer spiegelen. De route is: ACDEB.

41b.



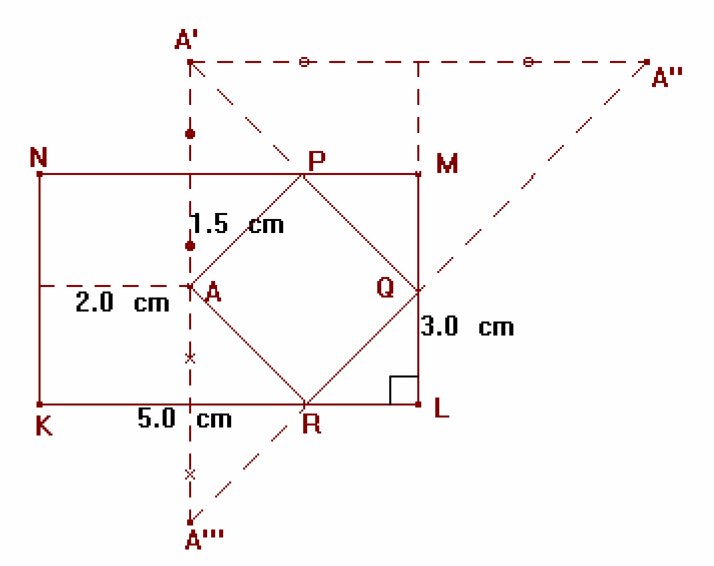
Nu eerst punt A tweemaal spiegelen. Verder punt B 1 keer spiegelen.
De route is nu: *APQRB*

41c.



Punt A twee keer spiegelen en punt B ook twee keer spiegelen. De route is nu: *AWXYZB*

42a.

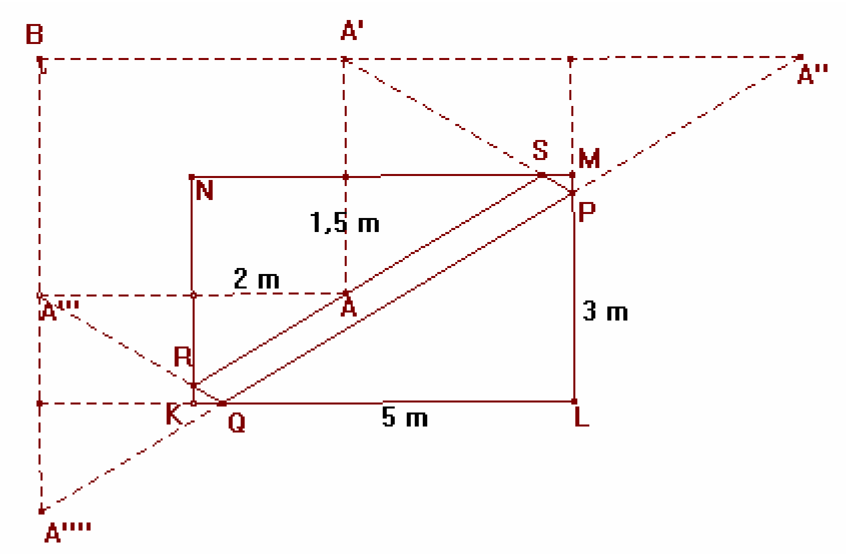


A spiegelen in MN dan in ML.
Verder A spiegelen in KL.
De route is *APQRA*

In de figuur zie je door het spiegelen dat geldt: AP = A’P en
A’Q = A’’Q en AR = A’’’R ⇒
APQRA = A’PQRA’’’=
A’’QRA’’’= A’’A’’’
A’A’’ = 6 en A’A’’’= 3 + 3 = 6
⇒ A’’A’’’= √(36 + 36) = √72 ⇒
de lengte is ongeveer 849 cm

De cm moet m zijn.

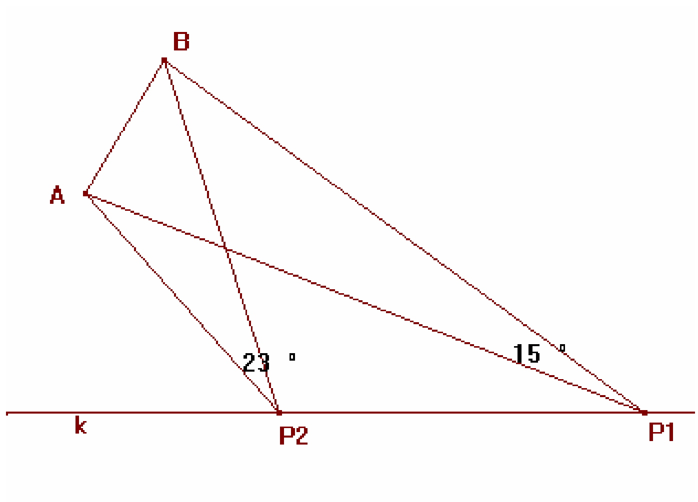
42b.



Punt A spiegelen in MN en dan in ML.
A ook spiegelen in KN en dan in KL.
De route is nu : *ASPQR*
Er geldt: ASP = A'SP en
A'P = A''P en AR = A'''R en ten slotte
A'''Q = A''''Q
⇒ AS+SP+PQ +QR+AR=
A'S+SP+PQ+QR+A'''R=
A''P+PQ+A'''Q=
A''P+PQ+QA''''=A''A''''
Nu kijken in Δ A''''BA'' ⇒

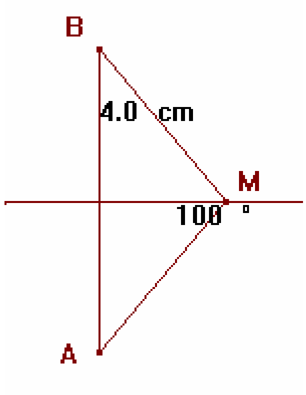
A''''B = 3 + 3 = 6 en BA'' = 4 + 6 = 10 ⇒ A''A'''' = √(36 + 100) = √136 ≈ 11,66 ⇒
De route is dus ongeveer 1166 cm.

43abc.



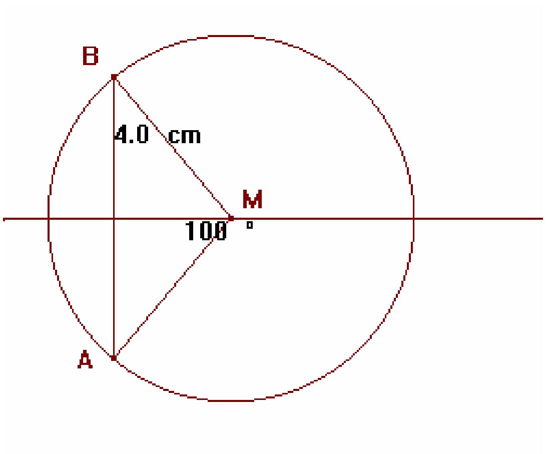
De hoek varieert van heel klein tot ongeveer maximaal 23º en wordt dan weer heel klein, terwijl punt P over lijn k beweegt van links naar rechts.

44a.

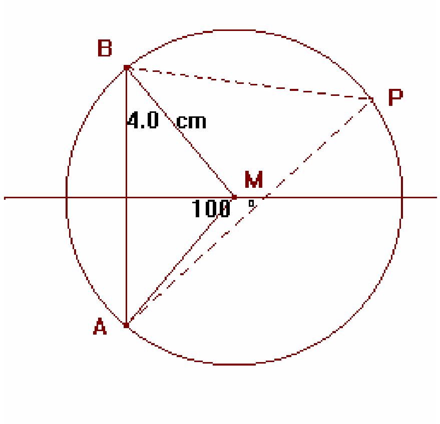


$\angle M = 100^\circ \Rightarrow \angle A = \angle B = 0{,}5.(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$

b.

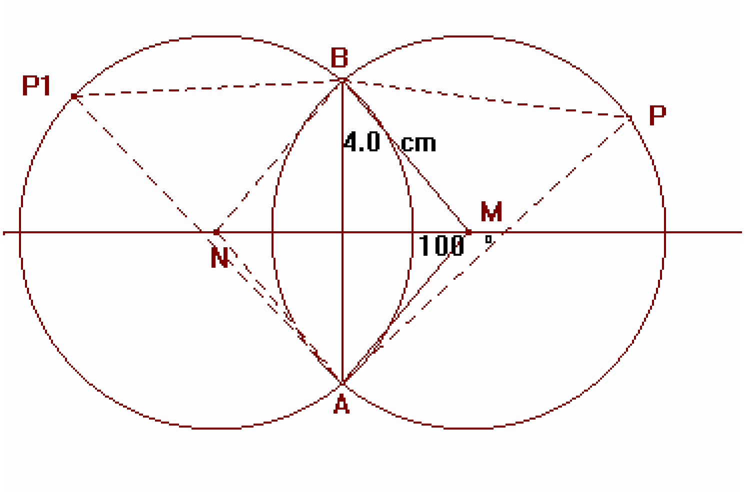


c.



$\angle APB = 0{,}5.\angle AMB = 50^o$
Dit is het gevolg van de stelling van de omtrekshoek.

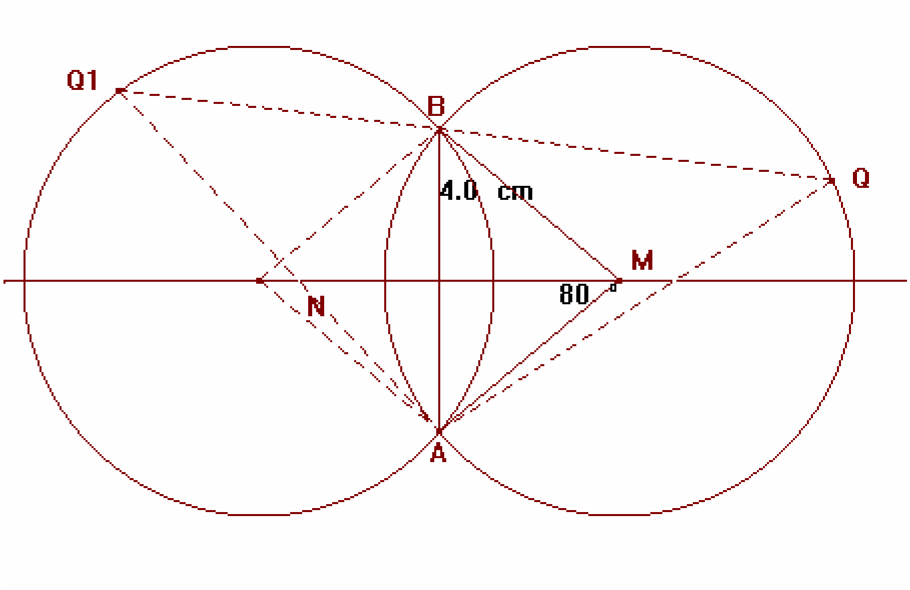
d.



is

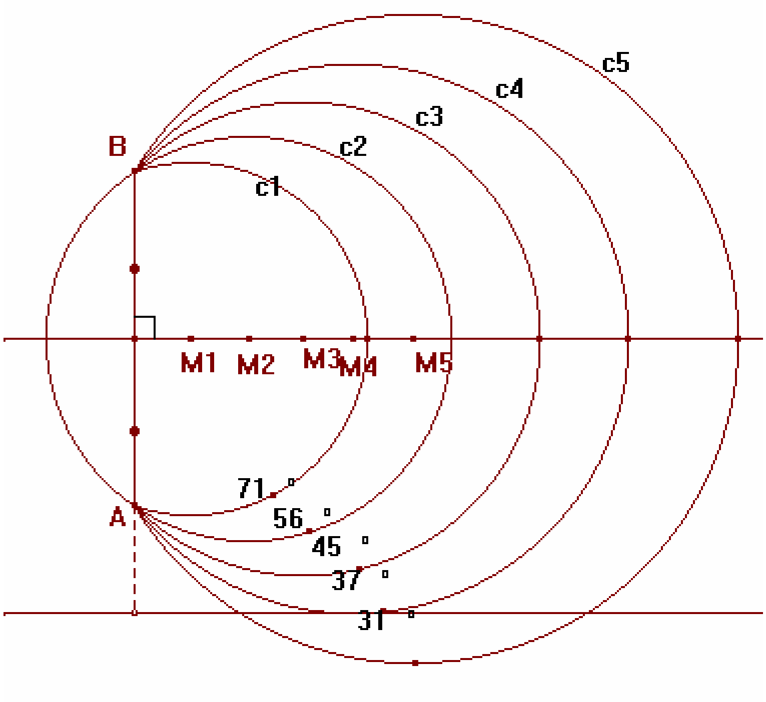
Spiegel punt M t.o.v AB $\Rightarrow$ punt N. dan geldt ook $\angle ANB = 100^o \Rightarrow$ volgens dezelfde omtrekshoekstelling dus ook $\angle AP1B = 50^o$

e. Als $\angle AQB = 40^o$ dan moeten we een middelpunthoek dus hebben van $80^o \Rightarrow$ de tekening wordt dan:



De gevraagde punten liggen op de grote boog *BQA* en op de grote boog *BQ1A*.

45ab

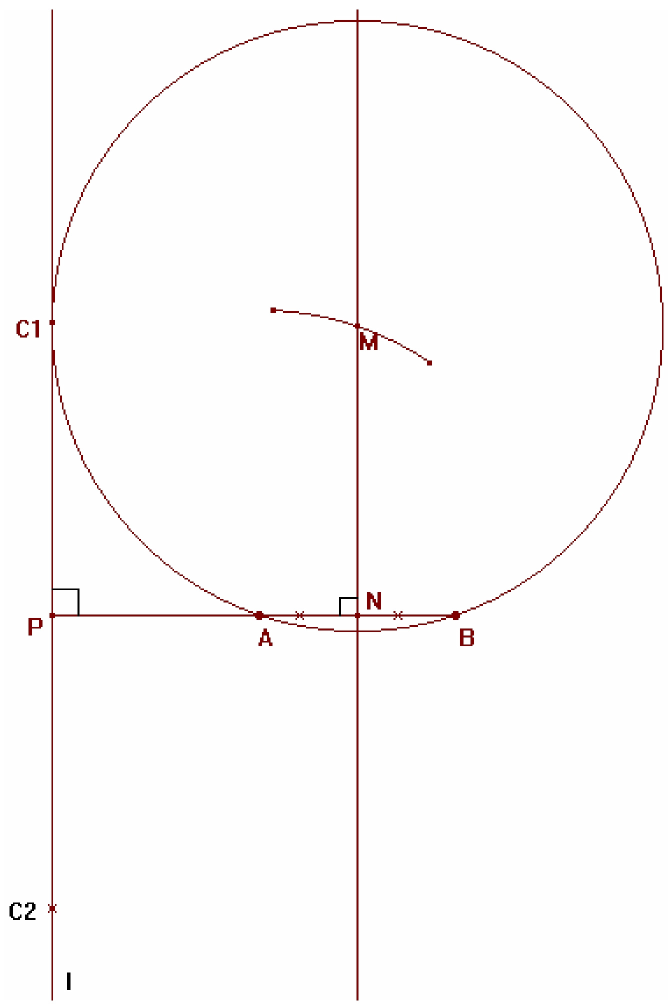


c. De isolijn tussen 71° en 56° snijdt de onderste lijn *l* niet $\Rightarrow$ die van 70° dus ook niet.

d. De twee laatste isolijnen liggen tussen 31° en 37° . Deze isolijnen snijden de onderste lijn *l* wel, dus moet de isolijn van 35° de onderste lijn l ook snijden.

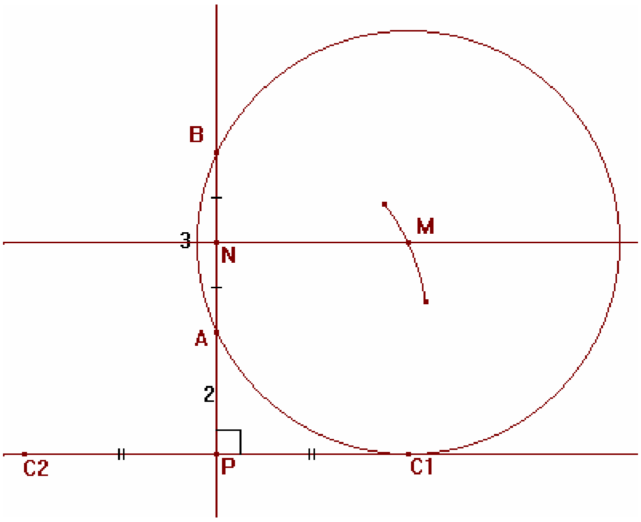
e. De isolijn (cirkel) die nog net een snijpunt met de onderste lijn *l* heeft is die van ongeveer 37°. Deze cirkel raakt de onderste lijn *l*.

46.



De cirkel moet de lijn *l* raken. Er moet dus gelden $NP = AM \Rightarrow$ punt M .
Zo ontstaat het raakpunt C_1 .
Deze situatie kunnen we ook aan de onderkant krijgen. Door het punt C_1 te spiegelen in punt P ontstaat het tweede gevraagde punt C_2.

47a.



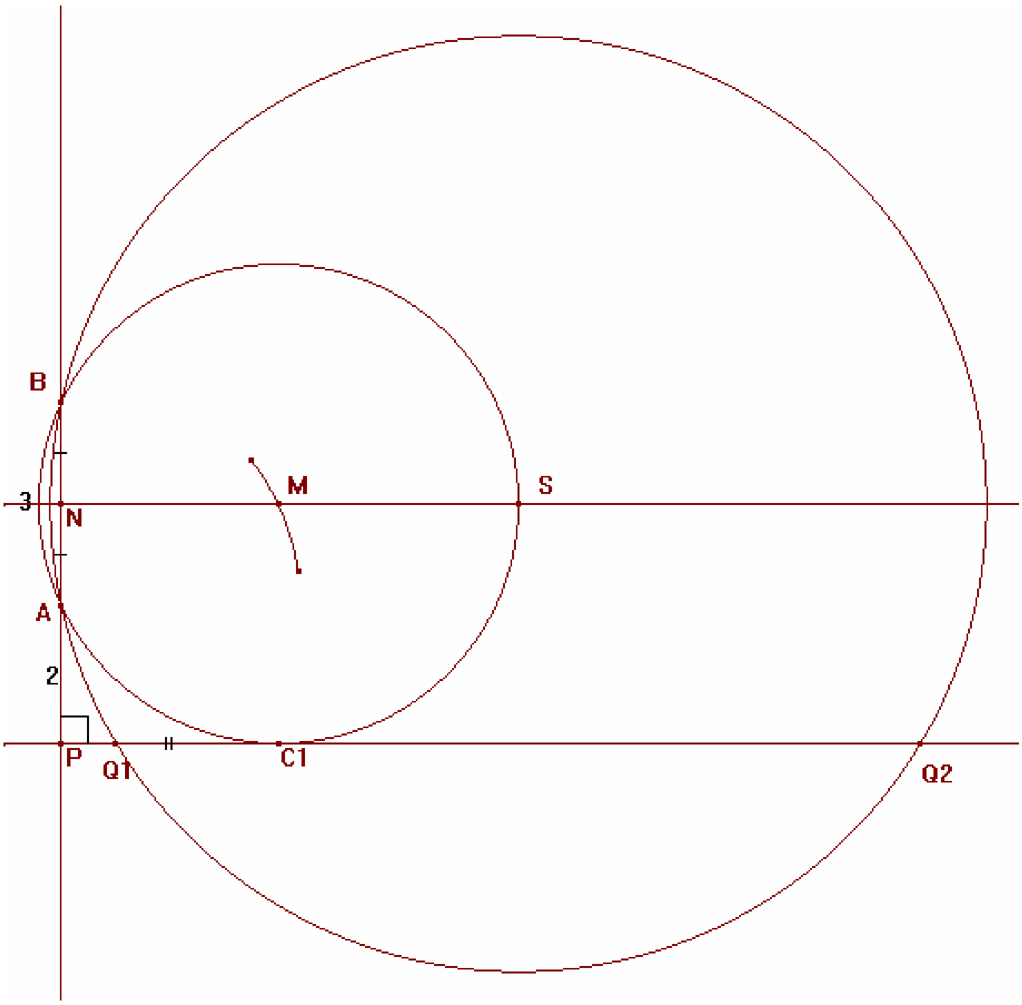
47b. De maximale kijkhoek is $\angle AC_1B$. Deze hoek is gelijk aan de helft van $\angle AMB$. Dus $\angle AMN$.

AN = 1,5 en AM = PN = 3,5 $\Rightarrow$

$\sin(\angle AMN) = \frac{1,5}{3,5} = \frac{3}{7} \Rightarrow$

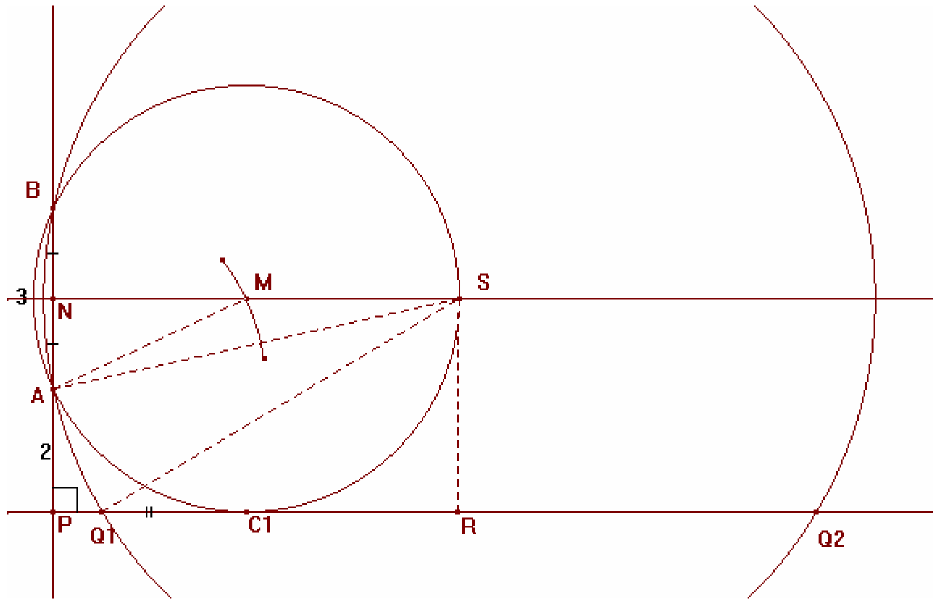
$\angle AMN \approx 25{,}4^{\circ}$ $\Rightarrow$ de maximale kijkhoek is dus ongeveer 25,4°.

c.



d. $\angle AQ_1$B = 0,5.$\angle ASB$ = 0,5 . $\angle AC_1B$. Ditzelfde geldt ook voor $\angle AQ_2B$

e.



We gaan eerst NM berekenen . Vervolgens NS. Dan AS en dus Q_1S. In $\Delta\ Q_1RS$ kunnen we dan via RS het lijnstuk Q_1R berekenen . Q_1Q_2 is dan het dubbele van Q_1R.

In ΔANM: $AM^2 = NM^2 + AN^2 \Rightarrow 3,5^2 = NM^2 + 1,5^2 \Rightarrow NM = \sqrt{10}$

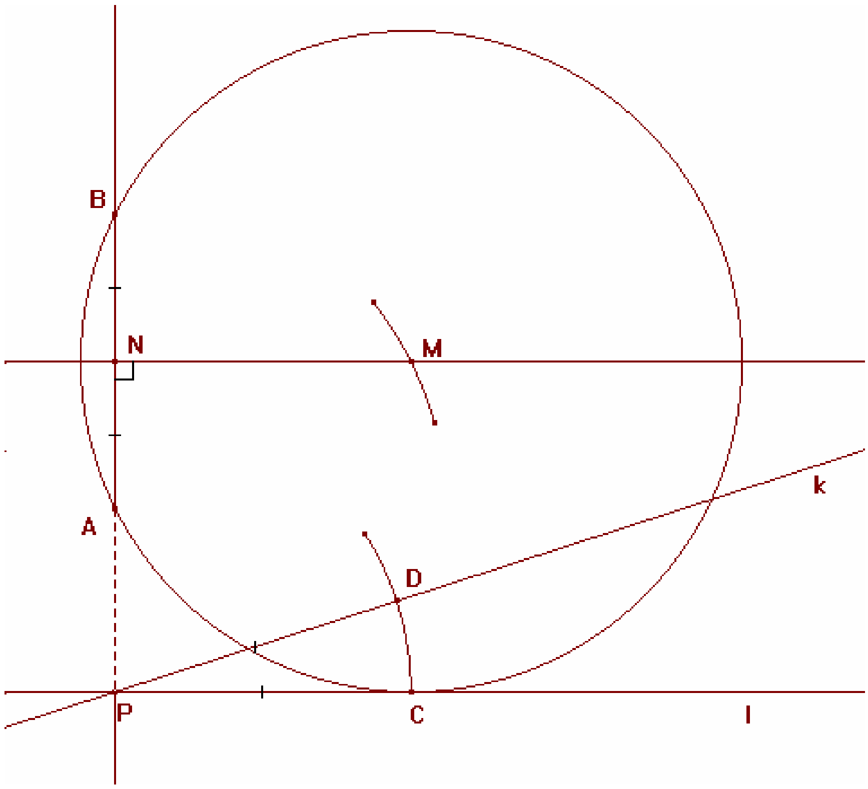
In Δ ANS: $AS^2 = NS^2 + AN^2 \Rightarrow AS^2 = \left(\sqrt{10} + 3,5\right)^2 + 1,5^2 \approx 46,64 \Rightarrow AS \approx 6,82$

$AS = Q_1S = 6,82$. Verder is $SR = 1,5 + 2 = 3,5$

In Δ Q_1RS geldt: $Q_1S^2 = Q_1R^2 + RS^2 \Leftrightarrow 46,64 = Q_1R^2 + 12,25 \Leftrightarrow Q_1R^2 = 34,39 \Rightarrow$

$Q_1R = \sqrt{34,39} \Rightarrow Q_1Q_2 = 2.Q_1R \approx 2.\sqrt{34,39} \approx 11,73$

48a,b

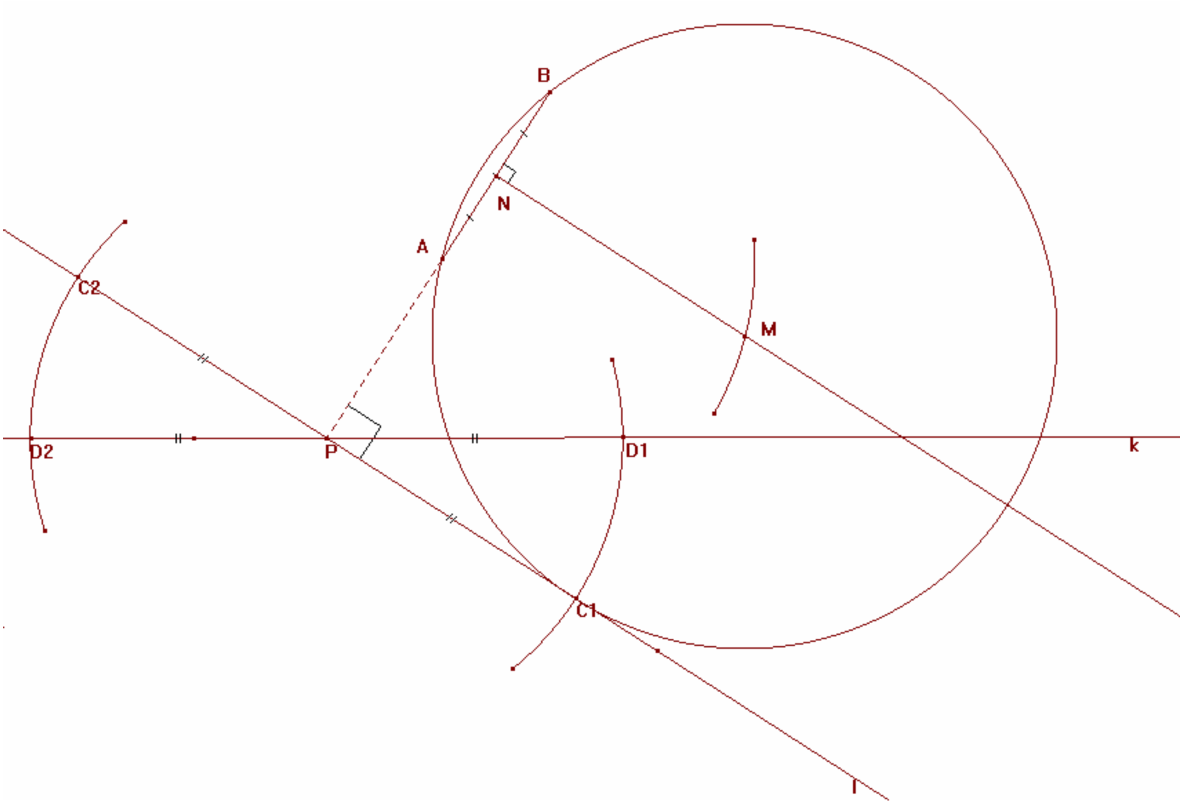


Punt C krijgen we doordat AM = NP

Punt D krijgen we doordat PC = PD

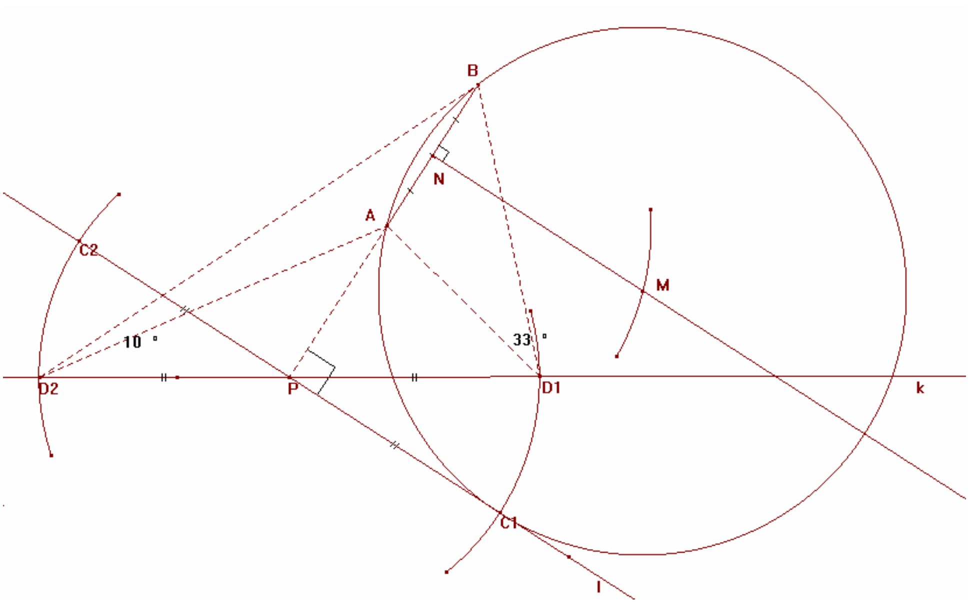
48c. Volgens de machtsstelling uit 31 volgt dat : $PC^2 = PA \,.PB$ Aangezien $PC = PD$ geldt nu dus :
$PD^2 = PA \,.\, PB \Rightarrow$ lijn k raakt in het punt D één van de isolijnen . Bij de raaksituatie is er sprake van de maximale kijkhoek $\Rightarrow$ In punt D op lijn k ziet men het lijnstuk AB onder een maximale kijkhoek.

49a,b



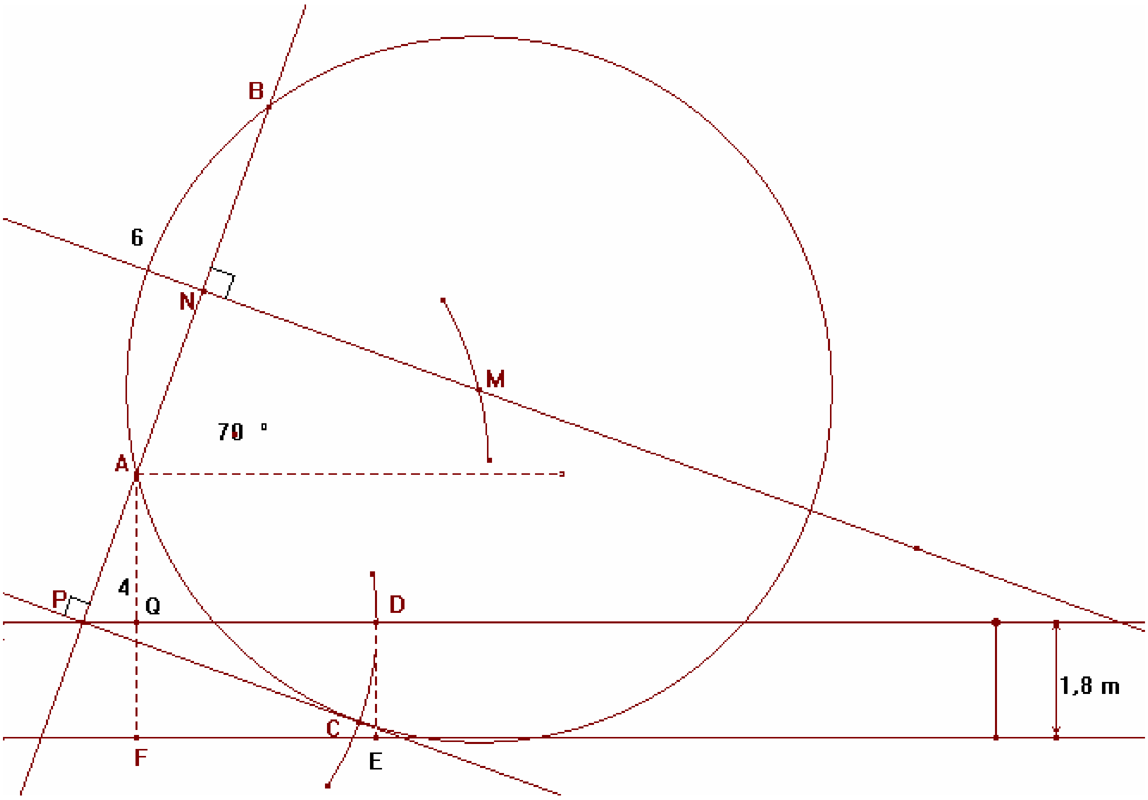
Teken de m.l.l. van AB en verleng AB tot snijpunt P met lijn k. Teken nu de lijn l door P loodrecht op AB. Construeer nu het punt C_1 op l , met de grootste kijkhoek op AB op de manier zoals in vorige vraagstukken. (o.a. NP = AM)
Punt C_2 heeft op grond van symmetrie ook een maximale kijkhoek op AB.
Met behulp van de machtstelling zoals in som 48 geldt nu dat punt D_1 ook een maximale kijkhoek heeft op AB en liggend op lijn k. Zo vinden we ook door spiegelen het punt D_2 = E op lijn k.

c.



Zie de figuur. De kijkhoeken bij C_1 en C_2 zijn gelijk , want de raakcirkels door A , B C_1 en C_2 hebben een gelijke straal. Door het omcirkelen van C_1 naar punt D_1 wordt straal van de raakcirkel kleiner, daardoor wordt de kijkhoek groter dan bij C_1. (In dit geval 33°)
Van C_2 naar D_2 = E wordt de straal van de raakcirkel juist groter. Daarom wordt de kijkhoek bij D_2= E juist kleiner.(In dit geval 10°). ⇒ Bij D_1 is dus de kijkhoek groter dan bij D_2 = E.

50a.



a. Zie de figuur. Net als in som 49 construeren we eerst de maximale kijkhoek van een punt C op de lijn door P loodrecht op AB. Dan krijgen we het punt D van de lijn door P op een hoogte van 1,8 m. Het gevraagde punt wordt dus punt E (1,8 m lager dan punt D)

b. Het blijkt dat FE ongeveer 36 dm is.

c. De maximale kijkhoek is ongeveer 47°

d. We moeten FE berekenen. We doen dit door eerst AP te berekenen . Dan AM en dus NP. Vervolgens in Δ ANM lijnstuk MN berekenen. Aangezien MN = PC = PD kunnen we dan QD berekenen als verschil van PD en PQ. Tenslotte QD = FE

In Δ APQ: AQ = 4 – 1,8 = 2,2 ⇒ $\sin(\angle APQ) = \sin 70^\circ = \dfrac{AQ}{AP}$ ⇒ $AP = \dfrac{2,2}{\sin(70^\circ)} \approx 2,34$

AM = NP = 3 + 2,34 = 5,34 In Δ AMN geldt: $MN^2 + 3^2 = 5,34^2$ ⇒
MN ≈ √19,53 = 4,42 Nu geldt: MN = PC = PD = 4,42

In Δ APQ : $\tan(\angle APQ) = \dfrac{AQ}{PQ} \Rightarrow PQ = \dfrac{2,2}{\tan(70^\circ)} \approx 0,80 \Rightarrow$

FE = QD = PD – PQ = 4,42 – 0,80 ≈ 3,62 m ≈ 36 dm.